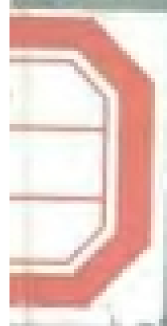
大学基础数学自学丛书

复变函数论基础

沈燮昌



大学基础数学自学丛书

复变函数论基础

沈 燮 昌

上海科学技术出版社

大学基础数学自学丛书

复变函数论基础

沈燮昌

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所发行　江苏扬中印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 15　字数 331,000
1982 年 2 月第 1 版　1982 年 2 月第 1 次印刷
印数 1—57,500

统一书号：13119·976　　定价：(科四) 1.40 元

序 言

我们伟大的祖国，为了尽早实现四个现代化的宏伟一业需要造就大批又红又专的、具有高度文化修养和现代科学知识的工业大军、农业大军、科技大军、文化大军和国防大军．这是一项摆在全体人民面前的极为艰巨的任务．人才的培养，基础在教育．然而，目前我国每年只可能吸收很小一部分中学毕业生进入高等院校深造，大批已经走上或将要走上各种工作岗位的千千万万青年人，都迫切要求学习现代科学基础知识，以适应新时期的需要．所以，在办好高等院校的同时，还应尽量为那些不能升入大学或无法离职进入大学的青年提供良好的业余学习条件．为此，上海科学技术出版社编辑出版《大学基础数学自学丛书》、《大学基础物理自学丛书》和《大学基础化学自学丛书》．

《大学学基础数学自学丛书》由我们负责主编，由北京大学、北京师范大学和复旦大学数学系有关教师执笔编写．包括《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《多元函数微积分》、《级数》、《空间解析几何》、《高等代数》、《复变函数论基础》、《常微分方程基础》、《概率论与数理统计基础》、《微分几何基础》、《有限数学引论》等共十一种，可供具有相当于高中文化程度、有志于自学大学数学课程的广大读者使用．

本《丛书》是一套大学基础课的自学读物，与中学程度的《数理化自学丛书》相衔接．为了使自学读者在没有教师讲课的条件下读懂、学好，其内容选取和编排不同于一般的大学课

本．文字叙述用讲课的形式书写；概念引入尽量从具体的、通俗的地方入手，逐步深入；内容安排抓住重点，讲深讲透．为了对读者解题有所启发，巩固所学的基础知识等，文中举有较多的例题；凡估计读者容易发生困难的地方，尽量给予必要的分析．习题、例题均按章分节安排，书后附有习题答案或提示．每册之首都有编者的话，指导读者自学全书．总之，想尽可能减少自学中的困难．

自学，时间总比在学校学习紧得多．要自学有成就，没什么"诀窍"，如果有的话，那就是"多思考，多练习，熟能生巧"．

学习必须从自己的实际水平出发，学每本书要有一定的基础．选读顺序可根据编者的话的指导进行．有志者，事竟成．希望广大读者循序渐近、持之以恒、锲而不舍地学习．愿大家努力学好．

《丛书》编审过程中得到了北京大学数学系、北京师范大学数学系和北京师范学院数学系领导的大力支持；许多同志参加了提纲、样稿的讨论，并提供了宝贵的意见；编撰者和审稿人为《丛书》付出了辛勤的劳动，谨此一并致谢．

由于《丛书》编写和出版的时间仓促，难免有缺点和错误，希望读者不吝赐教！

江泽涵　　　　赵慈庚

于北京大学燕南园　于北京师范大学工五楼

1980年1月

编者的话

复变函数论这门古老的学科与其他所有的学科一样，也是由于客观实际的需要而产生和发展起来的．如果说，数学在十八世纪是微积分占统治地位的话，那么在十九世纪，复变函数已经取代微积分而占了统治地位，目前它已经发展成为一个强大的数学分支．

在中学里，我们知道，在实数域中代数方程 $x^2+1=0$ 是没有解的，更不要说一般的 n 次代数方程了．但是在很多实际问题中，仍然需要研究它的解．为此引进了一个符号“i”．它具有性质 $i^2=-1$，记作 $i=\sqrt{-1}$．称 i 为虚数单位．这样一来，任意一个 n 次代数方程就有形如 $a+ib$ 的解了，其中 a 与 b 为实数，这种形式的数就称为复数．复数不仅能够用来表示代数方程的根及研究微分方程解的结构问题，而且还能够表示向量．由于大量实际问题中所出现的量都是向量，如速度、加速度、电场强度、磁场强度等．因此就可以用复数来表示这些向量而进行研究．所以，从十九世纪以来，复变函数理论得到了蓬勃的发展，目前，它已与自然科学中的很多学科，如理论物理、空气动力学、流体力学、弹性力学、地质学、自动控制等发生了密切联系．

从历史上看，高斯 (Gauss) 于 1811 年正式引入了复变函数的概念．复变函数积分的理论是柯西 (Cauchy) 在 1814 年开始建立的．而复变函数级数的理论是由魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 在十九世纪初建立的．黎曼 (Riemann) 在十

九世纪对复变函数的几何理论作出了很大的贡献．还有欧拉(Euler)、阿贝尔(Abel)、雅可比(Jacobi)、波阿松(Poisson)、施瓦兹(Schwarz)等也都在不同方面作出了贡献．近代，复变函数论的分支很多，有复变函数逼近论、整函数与亚纯函数的值分布理论、黎曼曲面、单叶函数论、广义解析函数、拟保角变换、多复变函数等等．

复变函数论与数学的其他分支有密切的联系，它作为一个强有力的工具可用来解决如解析数论、微分方程、概率统计、计算数学、拓扑学、微分几何等数学分支中所提出的有关理论及实际问题．我国数学家陈景润在研究"哥德巴赫猜想"问题中，就广泛地运用了复变函数的理论．

本书的目的是阐明复变函数论中一些最基本的概念、方法和理论，为今后进一步从事各种实际问题及深入研究的读者打下一个扎实的基础．书中包括了教育部于1977年11月制订的《复变函数论大纲》所要求的全部内容．全书共分九章：第一章，复数的基本概念、序列的极限及复数项级数；第二章，解析函数、柯西-黎曼方程及调和函数；第三章，解析函数的积分理论，并对柯西定理作了严格的证明；第四章，解析函数的级数展开理论并用来研究孤立奇点的分类；第五章，留数理论及用来计算定积分及计算区域内多项式根的个数问题；第六章，解析开拓的概念与方法；第七章，保形变换的一些基本概念及如何实现保形变换的各种方法．由于保形变换无论在理论上或实际中都有重要的作用，因此，这一章讲述的篇幅也较大．第八章，拉普拉斯变换、反变换及其在微分方程中的应用；第九章，只是非常简单地介绍一下解析函数在流体力学上的应用，关于它进一步的研究，请读者参考有关的专门书籍，如M. A. 拉甫伦捷夫与Б. A. 沙巴特著《复变函数论方法》

(中译本，高等教育出版社出版)．

本书论证严密，可供广大科技人员作自学参考之用，也可作为理工科大学、师范院校或电视、业余大学的复变函数论课的教科书、教学参考书．对于非理科大学的学生或自学读者，初读时可略去第六章中的第二节，第七章中的第五节及第六节等．此外，在证明有些结论时，用到实数理论中的一些知识，若读者不习惯，可暂且忽略证明细节而仅注意结论即可．

本书力求做到直观易懂，有启发性，适合于自学．凡学过本丛书中一元与多元微积分学的读者，都能够看懂本书．

为了使读者熟练地掌握本书的基本内容，书中配有较多的例题、习题和复习讨论题．个别较难的习题都标以记号“*”，读者可以选做，但其他习题及讨论题都应逐一演算，这是学习本书不可缺的重要环节．全书末附有习题答案，供读者参考核对．

我们希望读者阅读本书时，既要注意复变函数与微积分学的紧密联系，能从复变函数更清楚地看到微积分学中一些内容的实质；也要注意它们之间的差异，力求能体会到解析函数理论是解决多种问题的一个强有力的工具，从而在分析和解决实际问题的能力方面得到提高．

沈燮昌

于北京大学数学系

1980年12月

目　　录

第一章　复　　数

第二章　解 析 函 数

第三章　解析函数的积分理论

第四章 解析函数的级数展开

第五章 留数理论及其应用

第六章 解析开拓

第七章 解析函数的几何理论

第八章 拉普拉斯变换初步

第九章 解析函数在流体力学上的应用

习 题 答 案

第一章

复　数

复变函数就是自变量为复数的函数．在这一章中，我们首先引入复数的概念、性质及其运算，然后再引入平面上的点集、复数的极限以及由复数所构成的级数的收敛性概念．本章中的很多概念在形式上与微积分学中的一些基本概念有很多类似之处，可把它们看作是微积分学中相应概念及定理在复数域中的推广．

第一节　复数的概念

1.1　复数及其表示法

在解代数方程时，我们已经接触到符号"i"，它是方程

$$x^2+1=0$$

的一个根，即 $i^2=-1$，记作 $i=\sqrt{-1}$，称 i 为虚数单位．

设 x 与 y 都是实数，我们称形如 $x+iy$ 的数为复数，并记作 z，即 $z=x+iy$；x 与 y 分别称为复数 z 的实部与虚部，记作

$$x=\operatorname{Re} z,\quad y=\operatorname{Im} z.$$

符号"Re"是表示实数的拉丁字 realis 的前两个字母；符号"Im"是表示虚数的拉丁字 imaginarius 的前两个字母．当虚部 $y=0$ 时，我们就认为 $z=x+i0=x$，即 z 就是一个实数 x 因此，全部实数就是复数的一部分，复数可以看作是实数的推广．这种推广等到引进复数的运算后，就会看得更清楚．当

实部 $x=0$ 时，我们就认为 $z=0+iy=iy$，此时 z 就是一个纯虚数 iy.

现在设有两个复数

$$z_1=x_1+iy_1,\quad z_2=x_2+iy_2,\text{*)}$$

且仅当其实部与虚部都相等时，即

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2$$

时，才认为这两个复数是相等的，即 $z_1=z_2$.

从复数相等的规定可以看出：一个复数 z 对应且只对应着一对有序的实数 x 与 y，记作 $z=(x, y)$. 因此

$$z=(x, 0)=x,\quad z=(0, y)=iy.$$

既然一个复数可以表示为 $z=(x, y)$，所以可给复数以几何解释：在平面上取笛卡儿直角坐标系，其原点在 O，坐标轴为 Ox 与 Oy. 每一个复数 $z=(x, y)$，在此直角坐标系中对应着一个点 P，其横坐标为 x，纵坐标为 y；反之，任给平面直角坐标系中的一个点 $P(x, y)$，就有一个复数 $z=x+iy$ 与它相对应. 这样一来，复数就与平面直角坐标系中的点建立了一一对应的关系，这就是复数的几何表示. 特别地，实数与 Ox 轴上的点一一相对应，所以 Ox 轴又称为**实轴**；纯虚数与 Oy 轴上的点一一相对应，所以 Oy 轴又称为**虚轴**. 当然，在虚轴上只有一个点即原点对应着实轴上的数零，故可以认为原点对应着复数 $z=0+i0$，记作 $z=0$. 由于复数与平面上直角坐标系中的点建立了一一对应的关系，因此，以后就称复数 z 为点 z，并称平面为**复数平面**或简称**复平面**.

此外，也可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示复数 $z=x+iy$，这个向量的起点在原点 $(0, 0)$，终点在点 $P(x, y)$，即向量 $\overrightarrow{OP}$ 在 Ox

---

*) 今后，如果不作声明，总是用 $x_1, x_2, \cdots$ 或 $y_1, y_2, \cdots$ 表示实数，而用 $z_1, z_2, \cdots$ 表示复数.

轴上的分量为 x，在 Oy 轴上的分量为 y. 向量 $\overrightarrow{OP}$ 还可以看作为自由向量，即对于任何向量，不管其起点与终点的位置如何，只要其长度与方向同 $\overrightarrow{OP}$ 一样，就可以看作是同一个向量. 反过来，对于任一向量，在保持其长度与方向不变的情况下，可以将它平移到起点为原点，终点的横坐标为 x、纵坐标为 y 的向量的位置上，这个终点就对应着一个复数 $z=(x, y)$. 这样，复数与平面上的向量就建立了一一对应的关系，这就是复数的向量表示(见图 1-1).

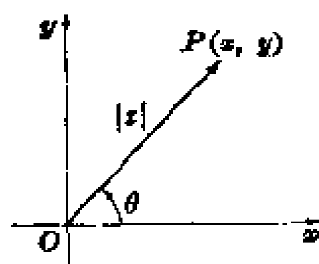


图 1-1

很多实际问题中所研究的量往往都是向量，例如速度、加速度、电场强度、磁场强度等. 由于向量能用复数来表示，因此用复数来表示上述这些量，再加以研究是很方便的.

我们称向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度为复数 $z=x+iy$ 的模，以符号 $|z|$ 或 r 表示，从而有

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1}$$

显然有

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|. \tag{2}$$

这几个不等式今后会经常用到. 当点 P 不与原点重合时，即 $z\neq0$ 时，向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 Ox 轴的夹角 θ 称为复数 z 的幅角，记作

$$\theta=\operatorname{Arg} z. \tag{3}$$

显然它可以取无穷多个值，而值与值之间相差 2π 的一个倍数. 因此，任何一个复数 z 都有无穷多个幅角. 设 θ_0 是其中的一个，则公式

$$\theta=\theta_0+2k\pi \quad (k\text{ 为任意整数})$$

就给出全部的幅角. 在 z 的幅角中，可以取 θ_0 满足

$$0\leqslant\theta_0<2\pi, \tag{4}$$

则 θ_0 称为 z 的主幅角，记作 $\theta_0=\arg z$. 可以用复数 z 的实部 x 与虚部 y 来表示主幅角 $\theta_0=\arg z$. 显然，当 $z=(x, y)$ 在第一象限时，$\arg z=\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$，其中反正切函数的主值规定在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上；当 z 在第二象限时，由于 $\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$ 取负值，即 $\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}=-\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{|x|}$，容易看出

$$\arg z=\pi-\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{|x|}=\pi+\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$$

(见图 1-2a)；当 z 在第三象限时，$\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$ 取正值，即取值在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 之间，因此得到 $\arg z=\pi+\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$ (见图 1-2b)；最后，当 z 在第四象限时，$\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$ 取负值 $-\operatorname{tg}^{-1}\frac{|y|}{x}$，容易看出

$$\arg z=2\pi-\operatorname{tg}^{-1}\frac{|y|}{x}=2\pi+\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$$

(见图 1-2c). 总结上述，于是得到

$$\theta_0=\arg z=\begin{cases}\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}, & \text{当 } z \text{ 在第一象限;}\\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}+\pi, & \text{当 } z \text{ 在第二象限;}\\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}+\pi, & \text{当 } z \text{ 在第三象限;}\\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}+2\pi, & \text{当 } z \text{ 在第四象限.}\end{cases} \tag{5}$$

我们也可以用模 $r=|z|$ 及幅角 $\theta=\operatorname{Arg} z$ 来表示复数 z 的实部 x 及虚部 y:

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta. \tag{6}$$

这就是复数的极坐标表示式，其中 $r=|z|$ 由

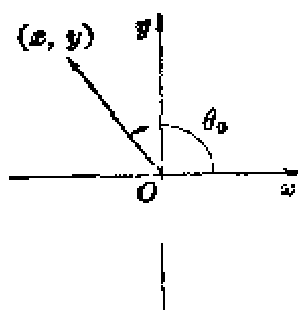


图 1-2a

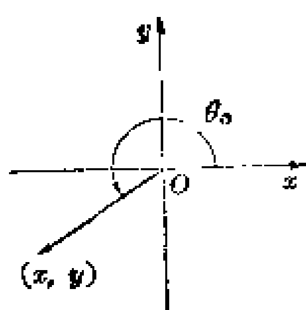


图 1-2b

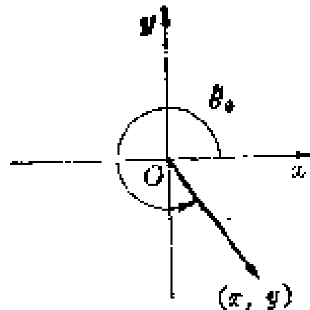


图 1-2c

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

所确定；而 $\theta=\operatorname{Arg}z=\theta_0+2k\pi$ 由公式 (5) 所确定，这样，任何一个复数 $z=x+iy$ 都可以表示为

$$\begin{aligned}z=x+iy&=r(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=|z|[\cos(\operatorname{Arg}z)+i\sin(\operatorname{Arg}z)],\end{aligned}\tag{7}$$

这就是复数的三角表示式.

由两个复数 z_1 及 z_2 相等的规定，从公式(1)及(5)容易看出：若 $z_1\neq0$，$z_2\neq0$，两个复数 z_1 及 z_2 相等的充要条件是：$|z_1|=|z_2|$，且 $\operatorname{Arg}z_1=\operatorname{Arg}z_2$. 其中后一个式子应该理解为 $\operatorname{Arg}z_1$ 与 $\operatorname{Arg}z_2$ 两个量中任何一个取定一个值以后，另一个所取的无穷多个值中可以找到一个值与之相等. 今后，一些类似这样的等式都按上述的意义理解.

设

$$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta},\tag{8}$$

我们说这个写法是合理的，因为复数 $\cos\theta+i\sin\theta$ 具有指数函数的一些特性，如按普通乘法用分配律相乘，只要注意到 $i^2=-1$，可以证明：

$$\begin{aligned}e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}&=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&\quad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\\&=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)=e^{i(\theta_1+\theta_2)},\end{aligned}\tag{9}$$

且 $e^{i\theta}\neq 0$（留给读者证明）. 这都是实指数函数所固有的性质. 这样,就可以把复数 z 写成

$$z=re^{i\theta},\tag{10}$$

其中 $r=|z|$, $\theta=\mathrm{Arg}\,z$.

容易看出:

$$|e^{i\theta}|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1.$$

(10)称为复数的指数表示式. 这种表示式在今后的理论研究或应用中是很方便的.

【例 1】 求证 $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{i\pi}=-1$, $e^{i\frac{3}{2}\pi}=-i$, $e^{i2\pi}=1$.

解: 由公式(8),容易得到

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=0+i=i,$$

$$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i\cdot 0=-1,$$

$$e^{i\frac{3}{2}\pi}=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi=0-i=-i,$$

$$e^{i2\pi}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1+i\cdot 0=1.$$

【例 2】 求复数 $z=1+i$ 的三角表示式与指数表示式.

解: 由公式(1)与(5)得到

$$|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\quad \theta_0=\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4},$$

因此 $$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

1.2 复数的运算及几何意义

复数的运算

1) 复数的加法 两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$ 的加法定义如下:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

这样，复数的加法运算与实数的加法运算在形式上没有什么不同. 并且复数的相加与两个向量的平行四边形法则也是一样的. 事实上,从图1-3可看出：两个向量按平行四边形法则相加后得到的向量，如果其起点在原点时，则其终点的坐标正是 x_1+x_2 与 y_1+y_2.

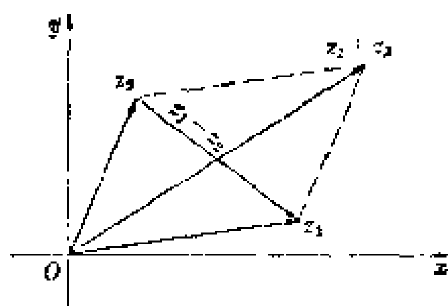


图 1-3

2) 复数的减法　复数相减是作为复数相加的逆运算来定义的. 设有两个复数 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$. 若存在 z, 使得

$$z_2+z=z_1, \tag{11}$$

则称 z 是由复数 z_1 及 z_2 相减后得到的复数, 记作

$$z=z_1-z_2.$$

设 $z=x+iy$, 则由复数相加的定义, 由(11)可以得到

$$(x_2+x)+i(y_2+y)=x_1+iy_1.$$

再由复数相等的规定得到

$$x_2+x=x_1, \quad y_2+y=y_1,$$

由此得

$$x=x_1-x_2, \quad y=y_1-y_2,$$

即

$$z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

从上述讨论可看出：两个复数相减后得到的复数是唯一的.

这样，复数的减法运算与实数的减法运算在形式上也没有什么不同.

由于复数相减是作为复数相加的逆运算来定义的，而复数相加符合向量按平行四边形相加的法则，因此两复数相减 z_1-z_2 就得到起点在向量 z_2 的终点，终点在向量 z_1 终点的向量(见图 1-3).

3）复数的乘法　设复数 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，定义两个复数 z_1 及 z_2 的乘法为：

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1). \tag{12}$$

它可以看作对两个复数表示式用分配律进行运算，并注意到 $i^2=-1$ 而得到的.

【例 3】　设　$z_1=1+i$，$z_2=\sqrt{3}+i$，求 z_1z_2.

解：

$$\begin{aligned} z_1z_2&=(1+i)(\sqrt{3}+i)\\ &=\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1\\ &=(\sqrt{3}-1)+i(1+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

若将复数 z_1 及 z_2 写成三角表示式及指数表示式时：

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_1e^{i\theta_1},$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_2e^{i\theta_2}.$$

则由公式(8)得到

$$\begin{aligned} z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\ &=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]\\ &=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned} \tag{13}$$

由此推出

$$|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|,\quad \operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2. \tag{14}$$

因此，两个复数乘积的模等于它们的模相乘，两个复数乘积的幅角等于它们的幅角相加.

从公式(13)可以看出，复数相乘的几何意义是将复数 z_1 放大 $|z_2|$ 倍，然后将其幅角按逆时针方向旋转一个角度 $\operatorname{Arg}z_2$. 即作一个相似变换，然后再作一个旋转变换即得.

【例 4】　求复数 $z=re^{i\theta}$ 的正整数次幂 z^n.

解：

$$\begin{aligned} z^n&=\underbrace{z\cdot z\cdots z}_{n\text{个}}=\underbrace{re^{i\theta}\cdot re^{i\theta}\cdots re^{i\theta}}_{n\text{个}}=r^ne^{in\theta}\\ &=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta). \end{aligned}$$

特别地，取 $r=1$，上面等式就是

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

这就是著名的德莫弗(De Moivre)公式.

【例 5】 求证

$$\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta,$$
$$\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta.$$

解：根据德莫弗公式

$$\begin{aligned}\cos 3\theta+i\sin 3\theta&=(\cos\theta+i\sin\theta)^3\\&=\cos^3\theta+3\cos^2\theta(i\sin\theta)\\&\quad+3\cos\theta(i^2\sin^2\theta)+(i\sin\theta)^3\\&=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)\\&\quad+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta).\end{aligned}$$

比较上式两端的实部与虚部就立刻得证.

4) 复数的除法 复数相除是作为复数相乘的逆运算来定义的. 设有两个复数 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, 且 $z_2\neq 0$. 若存在复数 z, 使得

$$z_2z=z_1,$$

则称 z 是由复数 z_1 与 z_2 相除后得到的复数，记作 $z=\frac{z_1}{z_2}$. 设 $z=x+iy$, 则由复数相乘的定义，从(12)可以得到

$$z_2z=(x_2x-y_2y)+i(y_2x+x_2y)=x_1+iy_1.$$

再由两个复数相等的规定得到

$$x_2x-y_2y=x_1,\quad y_2x+x_2y=y_1.$$

由此解得 $\qquad x=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\quad y=\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$

即

$$z=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{15}$$

由此看出，两个复数相除的商也是唯一的。

公式(15)也可由另一种运算得到：

在等式 $z_2z=z_1$，即

$$(x_2+iy_2)(x+iy)=x_1+iy_1$$

的两端乘以 x_2-iy_2：

$$(x_2-iy_2)(x_2+iy_2)(x+iy)=(x_1+iy_1)(x_2-iy_2),$$

得 $$(x_2^2+y_2^2)(x+iy)=(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2).$$

将上式两端再除以 $x_2^2+y_2^2$ 即得到(15)。此外，还可以形式地从

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

得到(15)。

如果将这些复数都写成三角表示式或指数表示式，利用公式(14)，则得

$$|z_2||z|=|z_1| \quad 及 \quad \operatorname{Arg} z_2+\operatorname{Arg} z=\operatorname{Arg} z_1,$$

从而得

$$|z|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|} \quad 及 \quad \operatorname{Arg} z=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2, \tag{16}$$

即

$$z=re^{i\theta}=\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)], \tag{17}$$

其中 $$z_1=r_1e^{i\theta_1}, \quad z_2=r_2e^{i\theta_2}.$$

因此，两个复数的商的模等于它们的模的商，两个复数的商的幅角等于它们的幅角之差。

从公式(17)可以看出，复数 z_1 除以复数 z_2 的几何意义

是：将 z_1 缩小 $|z_2|$ 倍，然后将其幅角按顺时针方向再旋转一个角度 $\operatorname{Arg} z_2$，因而也就是在作了相似变换后再作旋转变换.

【例 6】 求 $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$.

解：

$$z=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}+i(-i)}{(\sqrt{3})^2+1^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\,\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

总结上述 1)、2)、3)、4) 的讨论，容易看出，复数的运算具有以下规律：

（一） 设 z_1 及 z_2 是复数，则 z_1+z_2 也是复数. 这性质称为和的封闭性.

（二） 设 z_1、z_2 及 z_3 都是复数，则

$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3,$$

$$z_1+z_2=z_2+z_1.$$

即满足关于加法的结合律与交换律.

（三） $0=0+i\cdot 0$ 是复数，且对于任意的复数 z，都有 $0+z=z+0=z$，称为关于加法有主元素 0，也称 0 为零元素.

（四） 对于任意一个复数 z，有一个复数 $-z$，使得 $z+(-z)=(-z)+z=0$，称为关于加法有逆元素 $-z$.

代数上把满足以上四个性质的数系称为构成一个加法群（交换群）.

（五）设 z_1 及　是复数，则 z_1z_2 也是复数，这性质称为乘法的封闭性。

（六）设 z_1、z_2 及 z_3 都是复数，则

$$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3,$$

$$z_1z_2=z_2z_1.$$

即满足关于乘法的结合律与交换律。

（七）1 是复数，对于任意的复数 z，都有 $1\cdot z=z\cdot 1=z$，这称为关于乘法有主元素 1，也称 1 为单位元素。

（八）对于任意一个非零复数 z，都有一个复数 $\frac{1}{z}$，使得

$$z\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\cdot z=1.$$

这称为关于乘法有逆元素 $\frac{1}{z}$。

代数上把满足上述（五）、（六）、（七）、（八）四个性质的数系称为构成一个乘法群（交换群）。

（九）设 z_1、z_2 及 z_3 是复数，则

$$(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3.$$

即满足关于加法与乘法之间的分配律。

代数上把满足所有上述九个性质的数的集合称为数域，因此全体复数就是一个数域，称为复数域。

5）复数的开方　复数的开方是复数的乘方的逆运算。设给定复数 $z_0=r_0e^{i\theta_0}$. 求所有满足 $w^n=z_0$ 的复数 w，就称为把复数 z_0 开 n 次方，或称为求 z_0 的 n 次根，表为 $w=\sqrt[n]{z_0}$ 或 $w=z_0^{\frac{1}{n}}$.

设 $w=\rho e^{i\varphi}$，则由 $w^n=z_0$ 及根据例 4，得

$$\rho^n e^{in\varphi}=r_0 e^{i\theta_0}.$$

前面曾经讲过，两个复数相等的充要条件是其模相等，幅角也相等。由于θ_0是z_0的一个幅角，从而得到

$$\begin{cases}\rho^n=r_0,\\ n\varphi=\theta_0+2k\pi \quad (k\text{是整数}),\end{cases}$$

由此得到

$$\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r_0},\\ \varphi=\dfrac{\theta_0+2k\pi}{n} \quad (k\text{是整数}),\end{cases} \tag{18}$$

即

$$w=\sqrt[n]{z_0}=r_0^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{n}} \quad (k\text{是整数}). \tag{19}$$

容易看出，在上面的表示式中，只有当$k=0, 1, \cdots, n-1$时所得到的复数是不同的，而在k为其他整数时所得到的复数必相同于这n个复数中的一个。因此，有且仅有n个值满足$w^n=z_0$，即一个复数的n次根有n个值。

【例 7】 求$\sqrt[4]{1+i}$.

解：由于

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}},$$

根据(19)式得

$$\sqrt[4]{1+i}=(\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}} \quad (k=0, 1, 2, 3).$$

从而得到四个根为

$$w_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right),$$

$$w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$

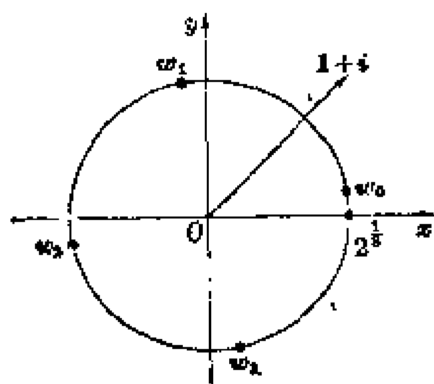


图 1-4

这四个根均匀地分布在半径为 $\sqrt[8]{2}$ 的圆周上，其中 w_0 的幅角为 $\frac{\pi}{16}$，其他每隔 $\frac{\pi}{2}$ 分布一个点(见图 1-4)。

6）共轭复数　复数 $z=x+iy$ 的共轭复数定义为 $x-iy$，记作

$$\bar{z}=x-iy.$$

显然有

$$|z|=|\bar{z}|,\quad \operatorname{Arg} z=-\operatorname{Arg}\bar{z}.$$

这表明两个复数共轭的充要条件是：它们的模相等，幅角的正负号相反.

共轭复数的几何意义是：在复平面上，z 与 $\bar{z}$ 两点关于实轴对称.

容易验证，共轭复数有下列一些重要性质：

$$z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2; \tag{20}$$

$$\bar{\bar{z}}=z;\quad \overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2;$$

$$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2;\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2};$$

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

这些性质以后将经常用到.

最后还要指出，对于任意两个复数 z_1 与 z_2，下式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{21}$$

成立，称为三角不等式. 在 $z_1\neq0$，$z_2\neq0$ 的情况下，当且仅

当 $z_1=kz_2(k>0)$ 时，上式等号才成立．此外还有

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|. \tag{22}$$

(21)式的成立是很明显的，因为从复数相加的几何意义知道：复数 z_1、z_2 与 z_1+z_2 的模正好组成一个三角形的三条边（见图1-3）．由于三角形的任意两条边的边长之和 $|z_1|+|z_2|$ 总大于等于第三边的长，因此就得到不等式(21)．不等式(21)中等号成立的几何意义是：复数 z_1、z_2 与 z_1+z_2 所表示的三个向量共线且同向．下面给以严格的证明：

由于不等式(21)的两边都是非负数，因此不等式(21)等价于

$$|z_1+z_2|^2\leqslant(|z_1|+|z_2|)^2,$$

即
$$(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\leqslant(|z_1|+|z_2|)^2$$

或
$$\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2\leqslant2|z_1||z_2|.$$

事实上，由于上式左边的两个复数互为共轭，所以可以将左边表示为 $2\mathrm{Re}(\bar{z}_1z_2)$，由此从上式得

$$\mathrm{Re}(\bar{z}_1z_2)\leqslant|z_1||z_2|=|\bar{z}_1z_2|. \tag{23}$$

由公式(2)知：一个复数 $\bar{z}_1z_2$ 的模显然大于或等于其实部，因而不等式(23)是成立的，由此推出不等式(21)成立．

其次，如果不等式(21)中的等号成立，则不等式(23)中的等号也成立．显然，(23)中等号成立的充要条件是：

$$\mathrm{Re}\,\bar{z}_1z_2\geqslant0 \tag{24}$$

及
$$\mathrm{Im}\,\bar{z}_1z_2=0 \tag{25}$$

同时成立．

设 $z_1=r_1e^{i\theta_1}\neq0$、$z_2=r_2e^{i\theta_2}\neq0$，由公式(25)及复数共轭与相乘的性质得到

$$\mathrm{Im}(r_1r_2e^{i(\theta_2-\theta_1)})=0,$$

即
$$\mathrm{Im}[r_1r_2(\cos(\theta_2-\theta_1)+i\sin(\theta_2-\theta_1))]=0,$$

由此得 $$\sin(\theta_2-\theta_1)=0.$$

因而

$$\theta_2-\theta_1=k\pi \quad (k=0,\ \pm1,\ \cdots). \tag{26}$$

同理，由公式(24)可以得到

$$\cos(\theta_2-\theta_1)\geqslant 0. \tag{27}$$

将(26)代入(27)后可知，(26)中的 k 只可能取偶数值，即

$$\theta_2-\theta_1=2m\pi \quad (m=0,\ \pm1,\ \cdots).$$

这就表示复数 z_1 与 z_2 的幅角相同，它们只相差一个正的常数因子，即可以找到 $k=\dfrac{r_1}{r_2}$，使 $z_1=kz_2$.

不等式(22)的证明是显然的．事实上，只要利用(21)就可以得到

$$|z_1|=|z_1-z_2+z_2|\leqslant|z_1-z_2|+|z_2|,$$

即 $$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1-z_2|.$$

同理可得 $$|z_2|-|z_1|\leqslant|z_2-z_1|.$$

归纳这两个不等式就得不等式(22).

不等式(22)可推广到多个复数的情况．用数学归纳法，容易得到

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.$$

习 题 1·1

1．求下列复数的模与幅角，并作图：

(1) $\sqrt{3}+i$；　　(2) $3-3\sqrt{3}\,i$；

(3) $-1+\sqrt{3}\,i$；　　(4) $-1-i$；

(5) bi，b 是实数；

(6) $a+bi$，a 与 b 是实数 $(a\neq0)$.

2．求下列复数的实部与虚部，模与幅角：

(1) -3;　　(2) $\frac{1}{i}$;

(3) $\frac{1-i}{1+i}$;　　(4) $(1+2i)(2+\sqrt{3}i)$;

(5) $\frac{i}{(i-1)(i-2)}$;　　(6) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n$.

3. 求下列根式的值:

(1) $\sqrt{1+i}$;　　(2) $\sqrt[3]{-2+2i}$;

(3) $\sqrt[6]{1}$;　　(4) $\sqrt[6]{\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-3)i}$.

4. 设 $z=x+iy$, 试证:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|.$$

5. 设 w 是 1 的 n 次根, $w\neq 1$, 求证 w 满足方程

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0.$$

6. 解方程组

$$\begin{cases} z_1+2z_2=1+i, \\ 3z_1+iz_2=2-3i. \end{cases}$$

第二节　平面的点集及区域

今后,我们所研究的变量都是复数,因此称为**复变量**. 复变量有它自己变化的范围, 即它在复平面上的某个点集上变化.

【例 1】　求满足 $\mathrm{Re}\,z=\mathrm{Im}\,z$ 的点集.

解: 设 $z=x+iy$, 则由 $\mathrm{Re}\,z=\mathrm{Im}\,z$ 可以得到直线 $x=y$, 即在平面上的直线 $x-y=0$ 上的全体点.

【例 2】　求连接复数 $1+i$ 及 2 所得线段的垂直平分线所构成的点集.

解: 显然,在此垂直平分线上所有的点 z 满足

$$|z-(1+i)|=|z-2|,$$

将上式两端平方，得

$$(x-1)^2+(y-1)^2=(x-2)^2+y^2,$$

即
$$x-y=1.$$

【例 3】 求以点 $z_0=(x_0, y_0)$ 为中心，半径为 R 的圆周，及圆的内部所构成的点集.

解：显然，在此圆周上的点 z 满足

$$|z-z_0|=R.$$

两边平方后，根据模的定义，得到圆周方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

此圆内的点 z 满足

$$|z-z_0|<R.$$

从而得
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2.$$

下面简单介绍有关平面点集的一些基本概念.

定义 1 平面上任意一点 z_0 的邻域定义为以 z_0 为中心、以某个正数 ρ 为半径的圆内部所有的点构成的集合. 显然，这个集合就是 $|z-z_0|<\rho$，记作 $S_\rho(z_0)$，或简单地用 $S(z_0)$ 表示.

定义 2 设有一个点集 E，若对于某一点 $z_0\in E$（即 z_0 属于点集 E），存在一个邻域 $S(z_0)\subset E$（即点集 $S(z_0)$ 中的一切点都属于集合 E），则称 z_0 是集合 E 的内点；若对于某一点 z_1（它不一定属于集合 E），它的任何邻域 $S(z_1)$ 中都包含有集合 E 中的无穷多个点，则称点 z_1 是集合 E 的凝聚点；若对于平面上的某一点 z_2，存在一个邻域 $S(z_2)$，使得 $S(z_2)$ 中的任何点都不属于集合 E，则称点 z_2 为集合 E 的外点.

定义 3 若点集 E 的每一个点都是 E 的内点，则称集合 E 为开集；若点集 E 的所有的凝聚点都属于集合 E，则称集

合 E 为闭集.

【例 4】 设点集 E 为所有满足 $|z|<1$ 的点 z 所构成的集合，则

1) E 中任何一点 z_0 都是内点，且 E 为开集；

2) 集合 $|z|\leqslant 1$ 上任何一点 z_1 都是 E 的凝聚点，从而推出集合 $|z|\leqslant 1$ 是闭集；

3) 集合 $|z|>1$ 上任何一点 z_2 都是 E 的外点.

解：对于任何一点 z_0, $|z_0|<1$, 可以构造以 z_0 为中心，半径小于 $1-|z_0|$ 的圆 $S(z_0)$. 显然，这个圆全部都位于集合 $|z|<1$ 内. 因而按定义，z_0 是内点，且 $|z|<1$ 是开集(见图 1-5). 从上述讨论可以看出，$|z|<1$ 内任何一点还都是凝聚点. 此外，若有一点 z_1, $|z_1|=1$, 则容易看出，z_1 的任意一个邻域 $S(z_1)$ 中包含有 $|z|<1$ 中无穷多个点，因此 z_1 也是集合 $|z|<1$ 的凝聚点. 因而，集合 $|z|<1$ 的所有凝聚点的集合为 $|z|\leqslant 1$, 即 $|z|\leqslant 1$ 是一个闭集. 最后对于任何一点 z_2, $|z_2|>1$ 可以构造一个以 z_2 为中心，半径小于 $|z_2|-1$ 的圆 $S(z_2)$, 显然这个圆与圆 $|z|<1$ 没有交点，即圆 $S(z_2)$ 中任何一点都不属于集合 $|z|<1$, 按定义，z_2 是集合 $|z|<1$ 的外点(见图 1-5).

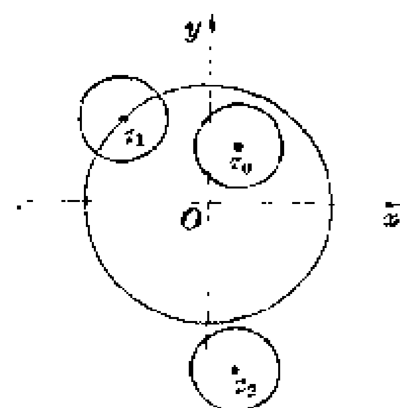


图 1-5

定义 4 平面上具备下列两个性质的点集 D 称为区域：

1) D 的每个点都是内点(开集性质)；

2) D 的任意两个点，可用一条整个属于 D 的折线连接起来(连通性质)(见图 1-6).

定义 5 设 D 是区域，点 z_0 不属于 D, 但 z_0 的任意一个

邻域内都包含有 D 内的点，则点 z_0 称为 D 的边界点. D 的全部边界点构成一个点集 C，称为区域 D 的边界. 一个区域 D 加上它的边界所构成的集合 $\overline{D}=D+C$ 称为闭区域(见图 1-6).

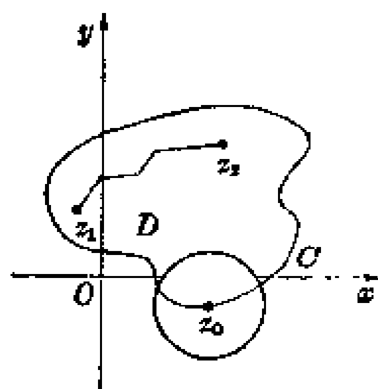


图 1-6

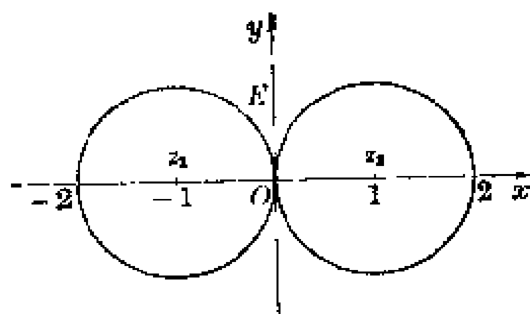


图 1-7

定义 6 对于一个集合 E，若存在一个以原点为中心的圆 $|z|<R$，使得 E 中所有的点都位于这个圆内，则称 E 为有界的；否则，就称 E 是无界的.

【例 5】 $|z|<1$ 是区域，$|z|=1$ 是它的边界，$|z|\leqslant 1$ 是闭区域. 它们都是有界的.

【例 6】 由两个圆 $|z-1|<1$ 及 $|z+1|<1$ 的内部所构成的集合 E 是开集而不是区域(图 1-7).

事实上，E 是由内点所组成，这是很明显的. 因此 E 是开集. 其次，于圆 $|z-1|<1$ 内任取一点 z_1，于圆 $|z+1|<1$ 内任取一点 z_2，显然无法用一条完全属于 E 内的折线连接这两个点. 因此 E 不是区域. 但它是由两个区域所组成的集合.

我们知道：若 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是两个在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的实连续函数，则方程组

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$$

就在平面上确定了一条连续曲线．如果令

$$z(t)=x(t)+iy(t), \quad a\leqslant t\leqslant b. \tag{1}$$

这条连续曲线就可以用方程

$$z=z(t), \quad a\leqslant t\leqslant b$$

来描写．

定义 7 连续曲线 C：

$$z=z(t)=x(t)+iy(t), \quad a\leqslant t\leqslant b$$

称为**简单曲线**，如果对于任意两个数 t_1、t_2 ($a\leqslant t_1\leqslant b$, $a\leqslant t_2\leqslant b$)，由 $t_1\neq t_2$ 可以推出 $z(t_1)\neq z(t_2)$．若在曲线 C 的两个端点 a、b 可以例外，即 $z(a)=z(b)$，则称曲线 C 为**简单闭曲线**．

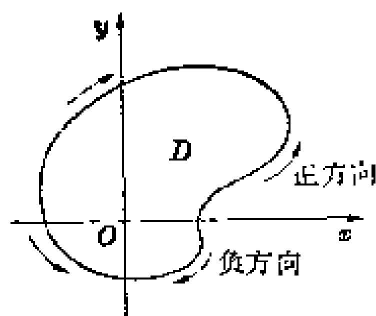


图 1-8

一个简单闭曲线 C 可以将平面分为两个区域，其中有一个是有界的，称为 C 的**内部**；另一个是无界的，称为 C 的**外部**．沿着一条简单闭曲线 C 有两个相反的方向，其中一个方向是：当一个观察者顺此方向沿 C 前进一圈时，C 的内部一直在 C 的左方，即逆时针方向，称为**正方向**；另一个方向是：当观察者顺此方向沿 C 前进一圈时，C 的外部一直在 C 的左方，即顺时针方向，称为**负方向**（见图 1-8）．

【例 7】 曲线 $z=\cos t$ ($0\leqslant t\leqslant\pi$) 是简单曲线．

事实上，它显然是一个连续且严格单调下降的函数．因此当 $t_1\neq t_2$ 时 ($0\leqslant t_1\leqslant\pi$, $0\leqslant t_2\leqslant\pi$) 有 $\cos t_1\neq\cos t_2$．

【例 8】 曲线 $z=e^{it}$ ($0\leqslant t\leqslant 2\pi$) 是简单闭曲线．

事实上，函数 $z=e^{it}=\cos t+i\sin t$ 的实部与虚部在区间

$0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 上的连续性是显然的. 此外有 $e^{i0}=e^{i2\pi}$, 即 $z(0)=z(2\pi)$. 下面证明,对于任意两个 t_1、t_2 $(0\leqslant t_1\leqslant 2\pi, 0\leqslant t_2\leqslant 2\pi)$ 若满足 $e^{it_1}=e^{it_2}$, 则必有 $t_1-t_2=2l\pi$ $(l=0, \pm 1, \cdots)$, 即 t_1 与 t_2 只能取值 0 与 2π. 由于 $e^{it_1}=e^{it_2}$, 因此得到 $e^{i(t_1-t_2)}=1$, 再比较实部与虚部,则得

$$\cos(t_1-t_2)=1, \quad \sin(t_1-t_2)=0.$$

由上述第二式得 $t_1-t_2=k\pi$, 其中 k 为任意整数. 再由上述第一式看出 k 必为偶数, 即 $t_1-t_2=2l\pi$ $(l=0, \pm 1, \cdots)$. 由于 t_1 与 t_2 满足 $0\leqslant t_1\leqslant 2\pi$, $0\leqslant t_2\leqslant 2\pi$, 因此这两个数必是 0 与 2π. 从而证明了它是一个简单闭曲线. 从几何上知道, 它是一个以原点为中心、半径为 1 的闭圆周.

定义 8 设 D 为一区域, 若属于 D 的任何简单闭曲线的内部仍都属于 D, 则就称 D 为单连通区域; 称非单连通区域为多连通区域.

【例 9】 圆 $|z|<R$ 是一个单连通区域; 而圆环 $0<R'<|z|<R$ 就是多连通区域.

定义 9 设 $z=z(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 是连续曲线. 任取一串数

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b \tag{2}$$

以及此曲线上相应的一串点 $z_j=z(t_j)$ $(j=0, 1, \cdots, n)$. 将这些点用折线 Q_n 连接起来, Q_n 的长度为

$$I_n=\sum_{j=1}^{n}|z_j-z_{j-1}|=\sum_{j=1}^{n}|z(t_j)-z(t_{j-1})|. \tag{3}$$

如果对于所有的数列 (2), 量 I_n 有上确界 $I=\sup I_n$, 则称曲线是可求长的,其弧长即为 I.

定义 10 设 $z=z(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 是简单曲线, 也可以是闭曲线. 若 $z(t)$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上有连续导数 $z'(t)=x'(t)+iy'(t)$, 且 $z'(t)\neq 0$ (这表示此曲线有连续变动的切线), 则此曲线称

为光滑曲线；由几段光滑曲线所组成的曲线称为逐段光滑曲线.

由微积分学知道，逐段光滑曲线必是可求长曲线(可参看Г. М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第三卷第一分册，1～5和82～85页)，其长度为

$$I=\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

今后我们所提到的曲线，除特别声明外，都指逐段光滑曲线.

习 题 1·2

1. 求满足下列关系式中的 z 的集合，并作图且说明哪些是区域，那些不是区域：

   (1) $|z-i|<2,\ |z+(1+i)|>1,\ |z+2|=4$；

   (2) $1<|z-z_0|<2,\ z_0=x_0+iy_0$；

   (3) $2\leqslant \operatorname{Re} z<3$；　　(4) $|z-1|=|z+1|$；

   (5) $|z|<|z-4|$；　　(6) $|z|<1-\operatorname{Re} z$；

   (7) $|z-2|-|z+2|>1$；　　(8) $|z-2|+|z-2|\leqslant 6$；

   (9) $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda,\quad \lambda>0$；

   (10) $\arg\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=\alpha,\quad -\pi<\alpha\leqslant\pi$.

2. 试证：对任何实数 θ，有 $e^{i\theta}\neq 0$.

3. 设复数 z 从 $z=1$ 开始，沿着曲线 $|z|=1$ 按逆时针方向旋转，设旋转角度为 θ，试分别就 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$、$\theta=\pi$、$\theta=2\pi$ 三种情况来讨论由下列函数得到的曲线：

   (1) $w=3z$；　　(2) $w=\dfrac{1}{z}$；

   (3) $w=z^2$；　　(4) $w=(z-2)^2$.

4. 设 $z=z(t)\ (a\leqslant t\leqslant b)$ 是光滑曲线，求此曲线上每一点的切线对 x 轴的倾角的正切.

第三节　序列与级数

3.1　序列的极限

大家知道，在微积分学中，实数序列的极限概念是微积分学的基础．在复数域中，复数序列的极限同样是复变函数的微积分学的基础．现在引入复数序列的极限概念：

定义 1　设 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ 是复数序列，记作 $\{z_n\}$．如果任给正数 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使当 $n>N$ 时，总有

$$|z_n-z_0|<\varepsilon \tag{1}$$

成立．则称复数序列 $\{z_n\}$ 收敛于复数 z_0，或称 $\{z_n\}$ 以 z_0 为极限，并用下面的记号表示：

$$\lim_{n\to+\infty} z_n=z_0 \quad 或 \quad z_n\to z_0.$$

现在解释极限的几何意义：以 z_0 为中心，ε 为半径作圆 $S_\varepsilon(z_0)$．因为 $|z_n-z_0|$ 表示点 z_n 与点 z_0 之间的距离，因此关系式(1)表示：当 n 充分大时($n>N$)，序列 $\{z_n\}$ 中所有的点 z_n 都位于 z_0 的邻域 $S_\varepsilon(z_0)$ 中．这与微积分学中的极限的几何意义有类似之处，在那里是当足标充分大时，序列中的点都位于以极限值为中心、长度为 2ε 的小区间中；现在序列中的点是位于以极限值为中心，直径为 2ε 的小圆中．

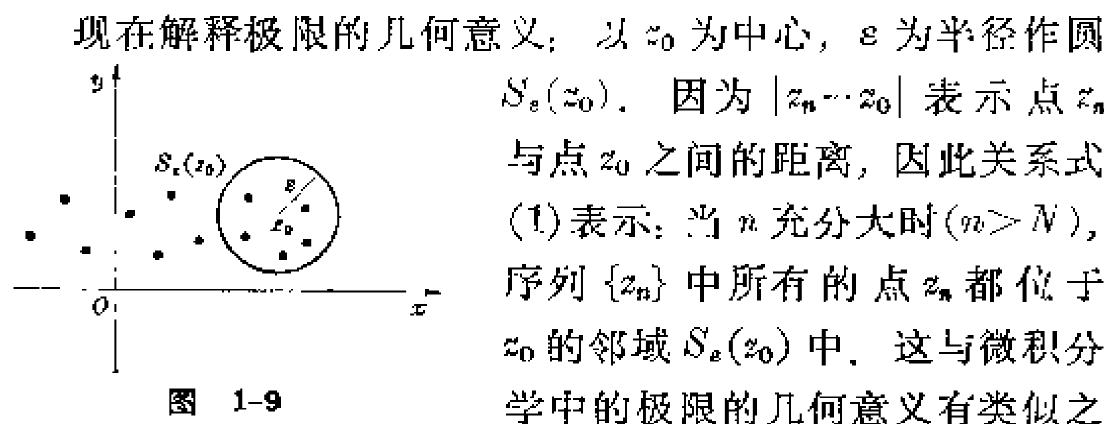


图　1-9

定理 1　序列 $\{z_n\}$ 以 z_0 为极限的充要条件是

1)　$$\lim_{n\to+\infty} x_n=x_0 \quad 及 \quad \lim_{n\to+\infty} y_n=y_0, \tag{2}$$

其中 $z_n=x_n+iy_n\,(n=1, 2, \cdots)$，$z_0=x_0+iy_0$，或

2) 当 $z_0\neq 0$ 时，

$$\lim_{n\to+\infty}|z_n|=|z_0| \quad 及 \quad \lim_{n\to+\infty}\operatorname{Arg} z_n=\operatorname{Arg} z_0. \tag{3}$$

【证】 先证明 1)：

必要性：由第一节公式(2)，得

$$|x_n-x_0|\leqslant|z_n-z_0| \quad 及 \quad |y_n-y_0|\leqslant|z_n-z_0|,$$

因此从(1)就立刻得到(2)。

充分性：由第一节公式(2)，得

$$|z_n-z_0|\leqslant|x_n-x_0|+|y_n-y_0|,$$

因此从(2)也立刻得到(1)。

其次证明 2)：

必要性：由第一节中的三角不等式(22)，得

$$||z_n|-|z_0||\leqslant|z_n-z_0|,$$

由此从(1)就可推出 $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n|=|z_0|$. 再证明 (3) 的后一个式子：设 $\operatorname{Arg} z_0=\theta_0$ (取定一个值)，由 (1) 可看出：当 $n>N$ 时，点 z_n 位于以 $\overrightarrow{Oz_0}$ 为中线，两边的张角各为 $\varphi_\varepsilon=\sin^{-1}\dfrac{\varepsilon}{|z_0|}$ 的角形区域中 (见图 1-10). 因此可取 $\operatorname{Arg} z_n$ 的一个值，使满足

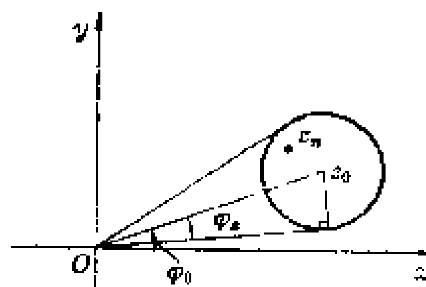


图 1-10

$$|\operatorname{Arg} z_n-\theta_0|\leqslant\varphi_\varepsilon=\sin^{-1}\frac{\varepsilon}{|z_0|}.$$

这就证明了 (3) 的第二个式子.

充分性：由于

$$x_n=|z_n|\cos(\operatorname{Arg} z_n), \quad y_n=|z_n|\sin(\operatorname{Arg} z_n),$$

利用余弦及正弦函数的连续性，从(3)式立刻得到

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=|z_0|\cos(\operatorname{Arg} z_0),\quad \lim_{n\to+\infty} y_n=|z_0|\sin(\operatorname{Arg} z_0),\tag{4}$$

根据第一节中的不等式(2)，得

$$|z_n-z_0|\leqslant|x_n-x_0|+|y_n-y_0|,$$

由此从(4)就立刻得到(1). ▌

微积分学中的极限运算法则在这里也成立.

定理 2 设序列 $\{z_n\}$ 与 $\{z'_n\}$ 分别有极限为 z_0 及 z'_0，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=z_0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} z'_n=z'_0$，则

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(z_n\pm z'_n)=z_0+z'_0$;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n z'_n=z_0 z'_0$;

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{z_n}{z'_n}=\dfrac{z_0}{z'_0}$，$z'_0\neq 0$.

这个定理的证明与微积分学中的证明类似，只要以复数中的三角不等式代替那里用的绝对值不等式即可，请读者自己证明.

定义 2 对于一个复数序列 $\{z_n\}$，如果存在一个正数 M，使 $|z_n|\leqslant M\ (n=1,2,\cdots)$，就称 $\{z_n\}$ 是**有界的**；否则，就称 $\{z_n\}$ 是**无界的**.

与上一节的定义 6 对比，可以看出，这里的序列 $\{z_n\}$ 相当于定义 6 中的集合 E.

显然，有极限的序列一定是有界的(请读者自己证明)，但是，有界序列却不一定有极限，如序列 $\{(-1)^n\}$ 就是如此.

定义 3 对于一个复数序列 $\{z_n\}$，如果任给 $M>0$，可以找到自然数 N，使当 $n>N$ 时，有

$$|z_n|>M,$$

就称 $\{z_n\}$ 趋向于 ∞，记作

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \infty. \tag{5}$$

从几何上看，序列 $\{z_n\}$ 趋向于 ∞ 是表示：任给一个以原点为中心，半径为 M 的大圆 $|z|\leqslant M$，可以找到一个足标 N，当 $n>N$ 时，对应足标 n 的复数 z_n 就一定在此大圆之外.

应当指出，像在微积分学中一样，这里也存在着复数序列 $\{z_n\}$ 收敛的柯西(Cauchy)判别法：

定理 3 复数序列 $\{z_n\}$ 有极限的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，可以找到 N，使当 $n>N$ 时，对于任何自然数 m，有

$$|z_{n+m}-z_n|<\varepsilon. \tag{6}$$

【证】 必要性：设 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z_0$，根据极限的定义，任给 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使当 $n>N$ 时，总有

$$|z_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因而对任何自然数 m，也有

$$|z_{n+m} - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

利用三角不等式及上面两个不等式，容易得到

$$\begin{aligned}|z_{n+m}-z_n| &= |z_{n+m}-z_0+z_0-z_n| \\ &\leqslant |z_{n+m}-z_0| + |z_0-z_n| < \varepsilon.\end{aligned}$$

充分性：设条件(6)成立，令 $z_n = x_n + iy_n$，则由第一节不等式(2)得到

$$|x_{n+m}-x_n| \leqslant |z_{n+m}-z_n| < \varepsilon$$

及
$$|y_{n+m}-y_n| \leqslant |z_{n+m}-z_n| < \varepsilon.$$

由此根据实数序列的柯西判别法知道：存在两个实数 x_0 及 y_0，使

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = y_0.$$

再应用定理 1, 就得到

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} (x_n + iy_n) = x_0 + iy_0. \quad]$$

3.2 矩形套定理　列紧性定理　覆盖定理

大家知道,在实轴上,区间套定理、列紧性定理、覆盖定理等在各种理论研究中起到很重要的作用,它们刻划了实数的连续性. 同样,在平面上也有类似的定理,这就是下列的

定理 4 (矩形套定理)　设有一串矩形 $R_n=\{a_n\leqslant x\leqslant b_n, c_n\leqslant y\leqslant d_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$, 且足标较大的矩形都包含在足标较小的矩形中, 即 $R_1\supset R_2\supset\cdots\supset R_n\supset\cdots$. 又设矩形 R_n 的对角线 $D_n\to 0$, 则有且仅有一个点属于所有的矩形 R_n $(n=1, 2, \cdots)$.

【证】 先证明存在性: 根据定理的条件, 区间序列 $\alpha_n=\{a_n\leqslant x\leqslant b_n\}$ 满足 $\alpha_1\supset\alpha_2\supset\cdots\supset\alpha_n\supset\cdots$; 区间序列 $\beta_n=\{c_n\leqslant y\leqslant d_n\}$ 满足 $\beta_1\supset\beta_2\supset\cdots\supset\beta_n\supset\cdots$, 此外区间 α_n 的长度 $b_n-a_n\leqslant D_n\to 0$; 区间 β_n 的长度 $d_n-c_n\leqslant D_n\to 0$. 由此根据区间套定理,存在实数 a_0, 它位于所有的区间 $\alpha_n(n=1, 2, \cdots)$中,即

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\leqslant a_0\leqslant\cdots\leqslant b_n\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1;$$

同样存在实数 b_0, 它位于所有的区间 $\beta_n(n=1, 2, \cdots)$ 中, 即

$$c_1\leqslant c_2\leqslant\cdots\leqslant c_n\leqslant\cdots\leqslant b_0\leqslant\cdots\leqslant d_n\leqslant\cdots\leqslant d_2\leqslant d_1.$$

由此可看出,点(a_0, b_0)属于所有的矩形 R_n $(n=1, 2, \cdots)$.

再证明唯一性: 如果存在两个点 z_0 及 z_0', 它们都属于所有的矩形 $R_n(n=1, 2, \cdots)$. 根据直径的定义,应该有

$$|z_0-z_0'|\leqslant D_n\to 0.$$

即 $z_0=z_0'$. 也即存在两个点是不可能的, 这就证明了唯一性.]

定理5(列紧性定理)　设复数序列 $\{z_n\}$ 是有界的，则必存在一个收敛的子序列 $\{z_{n_i}\}$.

【证】　由于复数序列 $\{z_n\}$ 有界，由本节定义2可知，必存在一个矩形 $R_1=\{a_1\leqslant x\leqslant b_1,\ c_1\leqslant y\leqslant d_1\}$，使得 $z_n\in R_1(n=1,\ 2,\ \cdots)$. 任取其中一个点，记作 $z_{n_1}\in R_1$. 将此矩形 R_1 均分为四个完全相同的小矩形，它们的边长分别为原来矩形边长的一半. 显然，这四个小矩形中，至少有一个包含有序列 $\{z_n\}$ 中的无穷多个点. 否则，序列 $\{z_n\}$ 就仅有有穷多个点了. 任取一个具有上述性质的小矩形，记作 $R_2=\{a_2\leqslant x\leqslant b_2,\ c_2\leqslant y\leqslant d_2\}$，此矩形的边长为

$$b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2},\quad d_2-c_2=\frac{d_1-c_1}{2}.$$

并在此矩形中任取一个 $\{z_n\}$ 中不同于 z_{n_1} 的点，记作 $z_{n_2}\in R_2$. 下面再将矩形 R_2 均分成四个相同的小矩形，其中也必有一个矩形 $R_3=\{a_3\leqslant x\leqslant b_3,\ c_3\leqslant y\leqslant d_3\}$ 包含有 $\{z_n\}$ 中不同于已经选取过的 z_{n_1} 及 z_{n_2} 的点，记作 $z_{n_3}\in R_3$，此矩形的边长为

$$b_3-a_3=\frac{b_2-a_2}{2}=\frac{b_1-a_1}{2^2},$$

$$d_3-c_3=\frac{d_2-c_2}{2}=\frac{d_1-c_1}{2^2}.$$

这样一直分下去，应用数学归纳法可以证明，对于任意的 m，必存在一个矩形 $R_m=\{a_m\leqslant x\leqslant b_m,\ c_m\leqslant y\leqslant d_m\}$，其边长为 $b_m-a_m=\dfrac{b_1-a_1}{2^{m-1}}$，$d_m-c_m=\dfrac{d_1-c_1}{2^{m-1}}$，$R_m$ 包含有序列 $\{z_n\}$ 中一个点 z_{n_m}，它不同于前面已经选出的点 $z_{n_1},\ z_{n_2},\ \cdots,\ z_{n_{m-1}}$. 这样，就得到了一串矩形序列 $R_1\supset R_2\supset\cdots R_m\supset\cdots$，以及一串点列 $\{z_{n_m}\}$，且矩形 R_m 的对角线长度

$$D_m=\sqrt{(b_m-a_m)^2+(d_m-c_m)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{(b_1-a_1)^2}{2^{m-1}}+\frac{(d_1-c_1)^2}{2^{m-1}}}\to 0.$$

由定理 4 可知，存在且只存在一个点 $z_0=(a_0, b_0)$ 属于所有的 $R_m(m=1, 2, \cdots)$.

现在来证明

$$\lim_{m\to+\infty} z_{n_m}=z_0. \tag{7}$$

事实上，任给 $\varepsilon>0$，以 z_0 为中心，半径为 ε 作一个圆 $S_\varepsilon(z_0)$. 由于 $z_0\in R_m(m=1, 2, \cdots)$，且 R_m 的直径 $D_m\to 0$，因此必存在一个数 $M>0$，使当 $m>M$ 时，所有的矩形 $R_m\subset S_\varepsilon(z_0)$，亦即所有的点 $z_{n_m}\in S_\varepsilon(z_0)$，$|z_{n_m}-z_0|<\varepsilon$. 这就证明了(7). ▌

定理 6(覆盖定理)　设 F 是有界闭集，K 是一些圆的集合(实际上只要是开集即可)，且 K 覆盖 F，这表示对于 F 中的任一个点 z，在 K 中一定可以找到一个圆，使点 z 属于这个圆，则在 K 中一定可以找到有限个圆，也覆盖闭集 F.

【证】　由于闭集 F 有界，根据上节定义 6 及本节定义 2，一定存在一个闭矩形 R_1，其边平行于坐标轴，且 $F\subset R_1$.

用反证法：假设定理的结论不对．我们对矩形 R_1 应用定理 5 的证明方法，分成四个相等的闭矩形：R_{11}，R_{12}，R_{13} 及 R_{14}．考虑闭矩形 $R_{1i}(i=1, 2, 3, 4)$ 与闭集 F 的交集 G_{1i} $(i=1, 2, 3, 4)$，显然 G_{1i} 也都是闭集，其中至少有一个使得定理的结论也不对(否则，若对于这四个集合，定理的结论都成立的话，那么对于集合 F，定理的结论也应该成立，但这与反证法的假设相矛盾)．我们取其中的一个集合，把它对应的闭矩形记作 R_2．这样不断地分下去，用数学归纳法可以证明，对每一个自然数 n，存在闭矩形 $R_n\subset R_{n-1}\subset\cdots\subset R_1$，它们的边都平行于坐标轴．它们与 F 相交后得到的集合使得

定理的结论仍不成立. 由于这些矩形的构造方法同前面定理5的证明中所述的一样, 故可以知道, 其对角线的长度 D_n 趋向于零. 因此根据定理4, 必存在一个点 z_0 属于所有的 R_n $(n=1, 2, \cdots)$. 并且以 z_0 为中心的任何一个圆 $S(z_0)$ 中必包含有足标足够大时的矩形, 所以必包含有 F 中的点. 这样, z_0 必是 F 的凝聚点, 根据闭集的定义, $z_0 \in F$. 由定理的条件知道, 在 K 中存在一个圆 S 包含 z_0. 同样, 当足标 n 充分大时, 所有的矩形 R_n 也必全部位于 S 中. 因此 S 就覆盖了 R_n 与 F 的交集. 这就违反了原来的构造方法, 因为在构造 R_n 时, 我们认为关于 R_n 与 F 的交集, 定理的结论不成立. 这就引出了矛盾. 从而证明了定理的结论是对的. ▌

3.3 复数球面 无穷远点

第一节中已经讲过, 在平面上引入了直角坐标系以后, 复数可以与平面上的点一一对应起来. 现在要找一个球面, 使得复数也能与球面上的点建立一一对应的关系, 从而引进无穷远点的概念.

取一个球心在原点、半径为1的单位球面, 作 z 轴, 使得它与平面上已给的直角坐标系 Oxy 相垂直, 且构成右手直角坐标系. z 轴的正方向与此单位球面的交点记作 N, 称北极; z 轴的负方向与此单位球面的交点记作 S, 称南极. 考虑起点在北极 N, 通过球面上任意点 Z 的射线, 它与 Oxy 平面相交于一点, 记作 z; 反之, 起点在北极 N 通过 Oxy 平面上任一点 z 的射线与单位球面也只交于一

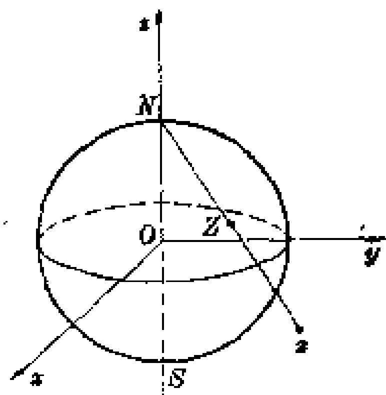


图 1-11

点，记作 Z. 这样，Oxy 平面上所有的点与单位球面上所有的点（除了北极 N 以外）就建立了一一对应的关系，也即所有的复数与单位球面上所有的点（除了北极 N 以外）建立了一一对应的关系. 此外，单位球面与 Oxy 平面的交线显然是圆周 $|z|=1$，它自己对应着自己；而上半个球面（除了北极以外）对应着圆外（$|z|>1$）的所有点；下半个球面对应着圆内（$|z|<1$）的所有点；南极对应着原点. 因此，我们也可以用球面上的点来表示复数. 这球面就称为复数球面. 在地图制图学上，就是用平面上的点通过这样的方式来表示球面上的点，这就是所谓测地投影.

现在来分析平面上的极限关系在球面上的反映. 设 z_n $(n=1, 2, \cdots)$ 是平面上的点列，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=z_0$. 若 z_n 在球面上对应着 $Z_n(n=1, 2, \cdots)$，z_0 在球面上对应着点 Z_0，则显然也有 $\lim\limits_{n\to+\infty} Z_n=Z_0$（这表示球面上两点 Z_n，Z_0 之间的距离趋近于零），反之亦然. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} Z_n=\infty$，则容易看出，相应地有 $\lim\limits_{n\to+\infty} Z_n=N$，其中 N 是北极点. 因此，在平面上除了已有的复数外，很自然地，可以再引进一个复数，称为无穷远点，记作 ∞，它在球面上对应着北极点 N. 这里的无穷远点 ∞ 不是像在微积分中那样把它看作符号，而是看作一个确定的点. 这个点的引入既是为了今后理论上的需要，也是为了能够更好地反映客观事物.

下面规定无穷远点的运算：设 z 是复数，规定

$$\infty+z=z+\infty=\infty, \quad \infty-z=z-\infty=\infty.$$

$$\infty\cdot z=z\cdot\infty=\infty \quad (z\neq 0).$$

$$\frac{z}{0}=\infty \quad (z\neq 0), \qquad \frac{z}{\infty}=0.$$

而对于 $\infty\pm\infty,\ 0\cdot\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0}$

则没有定义.

此外,规定无穷远点的模是一个大于任何正数的数,记作 $|\infty|=+\infty$. 对于无穷远点,像对于 $z=0$ 一样,不规定其幅角. 极限关系式

$$\lim_{n\to+\infty} z_n=\infty$$

可以看作序列 $\{z_n\}$ 趋向于无穷远点. 无穷远点的邻域就理解为任何一个圆的外部,即满足条件 $|z|>R$ 的点集,它正好对应着球面上以 N 为中心的一个球盖.

今后,如果没有特别的声明,总是用字母 z 表示平面上普通的点,如在第一节中所述,这些点的全体叫做复数平面或复平面. 复平面再加上无穷远点就称为*扩充复平面*. 整个单位球面上的点则与扩充复平面上的点一一相对应.

3.4 复数项级数

复数项级数收敛性的概念与实数项级数收敛性的概念是类似的.

定义 4 考虑复数项级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{8}$$

构成部分和

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n, \tag{9}$$

得到序列 $\{s_n\}$, 若序列 $\{s_n\}$ 有极限为 s:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n=s,$$

则称级数(8)*收敛*,其和为 s, 记作 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k=s$. 若序列 $\{s_n\}$ 没有极限,则称级数(8)*发散*.

【例 1】 求证级数

$$1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots \quad (q\text{ 为复数}). \tag{10}$$

在 $|q|<1$ 时收敛于 $\dfrac{1}{1-q}$，而当 $|q|\geqslant 1$ 时发散.

解：根据(9)，构造部分和

$$s_n=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}.$$

用极限的定义容易证明，当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$. 因而由极限的性质得到

$$\lim_{n\to+\infty} s_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}.$$

因此按定义，得

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k=\frac{1}{1-q}.$$

当 $|q|>1$ 时，显然有 $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=\infty$，

因而
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\infty.$$

这表示级数(10)发散.

当 $q=1$ 时，显然有

$$s_n=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ 个}}=n\to+\infty.$$

因此级数(10)也发散.

当 $|q|=1$，而 $q\neq 1$ 时，设 $q=e^{i\theta}$，$\theta\neq 2k\pi$ (k 是整数)，则

$$s_n=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}.$$

因为 $\arg e^{in\theta}=n\theta$，所以它对任何固定的 θ 都无极限，由此从定理 1 知道，复数 $e^{in\theta}$ 当 n 趋向于 $+\infty$ 时，无极限，亦即 s_n 无极限. 因此级数(10)发散.

现在给出级数(8)收敛的必要条件：

定理 7 设级数(8)收敛，则 $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$.

【证】 因为级数(8)收敛，设 $\lim_{n\to+\infty} s_n=s$. 因此

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}(s_{n+1}-s_n)=\lim_{n\to+\infty} s_{n+1}-\lim_{n\to+\infty} s_n=s-s=0. \ \blacksquare$$

定理 8 级数 (8) 收敛的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使当 $n>N$ 时，对任意自然数 m，总有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+m}|<\varepsilon. \tag{11}$$

【证】 由定理 3 知道，使级数 (8) 的部分和序列 $\{s_n\}$ 有极限的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，可以找到自然数 N，使当 $n>N$ 时，对于任意自然数 m，总有

$$|s_{n+m}-s_n|<\varepsilon.$$

由此即得(11). 】

定义 5 若级数(8)中每一项取模后得到级数

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots$$

收敛，则称级数(8)绝对收敛.

绝对收敛级数一定是收敛的. 事实上，这只要利用三角不等式

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+m}|\leqslant|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+m}|$$

以及定理 8 就可得证.

下面给出使级数(8)绝对收敛的充分条件，它与微积分学中的情况相类似，因而也称为 M 判别法.

定理 9 若级数(8)中的每一项 u_n 对充分大的 n，满足

$$|u_n|\leqslant M_n, \tag{12}$$

且级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_n$ 收敛，则级数(8)绝对收敛.

【证】 由(12)可得

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+m}|\leqslant M_{n+1}+M_{n+2}+\cdots+M_{n+m},$$

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 应用定理 8 即得证. 】

设有两个级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{8}$$

及

$$u_1'+u_2'+\cdots+u_n'+\cdots, \tag{13}$$

由它们构造另外两个级数

$$(u_1\pm u_1')+(u_2\pm u_2')+\cdots+(u_n\pm u_n')+\cdots \tag{14}$$

及

$$u_1u_1'+(u_1u_2'+u_2u_1')+(u_1u_3'+u_2u_2'+u_3u_1')+\cdots$$
$$+(u_1u_n'+u_2u_{n-1}'+\cdots+u_{n-1}u_2'+u_nu_1')+\cdots, \tag{15}$$

显然它们是从级数(8)与(13)的对应项相加或相减以及形式上相乘后得到的级数. 关于它们,有相应的定理如下:

定理 10 设级数(8)与级数(13)都绝对收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=s,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}u_n'=s'. \tag{16}$$

则级数(14)及级数(15)也绝对收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm u_n')=s\pm s'; \tag{17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_1u_n'+u_2u_{n-1}'+\cdots+u_{n-1}u_2'+u_nu_1')=ss'. \tag{18}$$

【证】 级数(14)的部分和

$$(u_1\pm u_1')+(u_2\pm u_2')+\cdots+(u_n\pm u_n')=s_n\pm s_n',$$

其中 s_n 及 s_n' 分别为级数(8)及(13)的部分和,由此从(16)就得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=s$ 及 $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n'=s'$,从而可得(17). 级数(14)的绝对收敛性是明显的,只要注意到对任何的自然数 n 与 m,有

$$|u_{n+1}\pm u_{n+1}'|+|u_{n+2}\pm u_{n+2}'|+\cdots+|u_{n+m}\pm u_{n+m}'|$$
$$\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+m}|u_k|+\sum_{k=1}^{n+m}|u_k'|,$$

应用级数收敛的柯西判别法(即定理 8) 就可证得级数(14)的绝对收敛性.

现在设 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sigma$, $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n'|=\sigma'$. 将级数(15)中的括弧打开后得到新的级数, 记作

$$h_1+h_2+\cdots+h_n+\cdots. \tag{19}$$

下面证明这个级数是绝对收敛的. 事实上, 考虑 (19) 中的任意多项, 把它们每一项取绝对值后相加: $G_p=|h_1|+|h_2|+\cdots+|h_p|$, 显然, 一定可以找到自然数 n, 使得

$$\begin{aligned}G_p\leqslant&|u_1u_1'|+|u_1u_2'|+|u_2u_1'|+|u_1u_3'|+|u_2u_2'|\\&+|u_3u_1'|+\cdots+|u_1u_n'|+|u_2u_{n-1}'|+\cdots\\&+|u_{n-1}u_2'|+|u_nu_1'|\\=&(|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|)\\&\times(|u_1'|+|u_2'|+\cdots+|u_n'|)\leqslant\sigma\sigma'.\end{aligned}$$

由此看出, 序列 $\{G_p\}$ 单调上升且有界, 故必有极限. 这就证明了级数(19)是绝对收敛的. 由此可推出级数(15)是绝对收敛的.

其次证明级数 (19) 收敛于和 ss'. 由于级数(19)绝对收敛, 因此任给 $\varepsilon>0$, 存在自然数 N, 使得

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}|h_k|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{20}$$

不妨认为级数(19) 的前 N 项正好对应着级数 (15) 中的前 p 项. 由于绝对收敛级数必收敛, 因此可设 $\sum_{k=1}^{\infty}h_k=h$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_1u_n'+u_2u_{n-1}'+\cdots+u_nu_1')=h. \tag{21}$$

设上述级数的部分和为 Q_n, 于是由(20)得

$$|Q_p-h|\leqslant\sum_{k=\lambda+1}^{\infty}|h_k|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{22}$$

另外再考虑一串级数

$$\begin{aligned}
&u_1u_1'+u_1u_2'+\cdots+u_1u_n'+\cdots=u_1s',\\
&u_2u_1'+u_2u_2'+\cdots+u_2u_n'+\cdots=u_2s',\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&u_mu_1'+u_mu_2'+\cdots+u_mu_n'+\cdots=u_ms',\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned} \tag{23}$$

研究差 $\qquad |Q_p-(u_1s'+u_2s'+\cdots+u_ms')|.$

从(23)及(20)容易看出，当 $m>p$ 时，

$$|Q_p-(u_1s'+u_2s'+\cdots+u_ms')|\leqslant\sum_{k=\lambda+1}^{\infty}|h_k|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{24}$$

比较(22)及(24)可看出，任给 $\varepsilon>0$，存在自然数 p，当 $m>p$ 时，有

$$\begin{aligned}
&|h-(u_1s'+u_2s'+\cdots+u_ms')|\\
&\quad\leqslant|h-Q_p|+|Q_p-(u_1s'+u_2s'+\cdots+u_ms')|<\varepsilon.
\end{aligned}$$

即 $$\lim_{m\to+\infty}(u_1s'+u_2s'+\cdots+u_ms')=h.$$

从而由(16)得到

$$ss'=h.$$

由此从(21)就得到(18)．▌

习　题　1·3

1．下面的序列是否有极限？如果有的话，求出其极限值来：

(1) $\frac{3+4i}{6},\ \left(\frac{3+4i}{6}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{3+4i}{6}\right)^n,\ \cdots;$

(2) $1,\ \frac{i}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{i}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{i}{6},\ -\frac{1}{7},\ -\frac{i}{8},\ \cdots;$

(3) $1,\ i,\ -1,\ -i,\ 1,\ i,\ -1,\ -i,\ \cdots.$

2. 用 ε-N 的语言证明序列 $\left\{\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right\}$ 的极限为零.

3. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_{2n}=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_{2n+1}=a$, 求证 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=a$.

4. 下列级数是否收敛? 是否绝对收敛?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+5i)^n}{n!}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}(1+i)^n$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1+5i)^n$.

5. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=a$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=a$.

6. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=z_0$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n|=|z_0|$, 但反过来不一定对.

7. 设有一串三角形序列 $\{\triangle_n\}$, 其中每一个三角形 $\triangle_n$ 是由三角形 $\triangle_{n-1}$ 的三边的中点连线而得到的四个相等三角形中任意的一个. 求证: 有且仅有一个点属于所有的三角形 $\triangle_n(n=1, 2, \cdots)$.

第一章小结

1. 引进了复数 $z=x+iy$ 的概念, 其中 $x=\operatorname{Re} z$ 称为复数 z 的实部; $y=\operatorname{Im} z$ 称为复数 z 的虚部, $i=\sqrt{-1}$. 复数可以用球面上的点来表示, 由此引进一个无穷远点. 此外, 给出了复数的模及幅角的概念以及复数的四种表示式, 即把复数 $z=x+iy$ 看作是: (1) 平面上的点 $P(x, y)$; (2) 起点在原点, 终点在点 $P(x, y)$ 的一个向量; (3) 复数的三角表示式; (4) 复数的指数表示式.

2. 引进了复数的几种运算: (1) 相等; (2) 加法; (3) 减法; (4) 乘法; (5) 除法; (6) 开方; (7) 共轭. 其中加法与乘法是最主要的, 由此, 全体复数构成的集合对引进的加法及乘法运算构成复数域. 复数的运算具有几何意义及一些性质, 其中三角不等式占有很重要的地位,

3．复数极限及复数项级数收敛及绝对收敛的概念是实数集合上相应概念的推广，因此，也具有实数极限及级数中的一些性质，特别是柯西准则在这里也成立．

4．为了今后理论上的需要，将实轴上实数理论中的一些结果（区间套定理，列紧性定理，覆盖定理）都推广到平面上．

5．为了今后的需要，介绍了平面点集及曲线的一些知识，但往往是以复数的形式出现的．

第一章复习讨论题

1．求复数 $\frac{3+i}{2-i}$ 的模和幅角，并作图．结合此题搞清楚复数的三角表示式和指数表示式，复数的主幅角是如何选取的？

2．复数的运算与向量的运算有什么异同？它与实数的运算又有什么异同？

3．$i+\sqrt{i}$ 是复数吗？

4．设 $z=x+iy$，其主幅角 $\arg z$ 规定在 $-\pi\leqslant\arg z<\pi$ 之间．试求 $\arg z$ 通过 $\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$ 的表示式．

5．写出方程 $z^n+z_0=0$ 的全部根，其中 $z_0=r_0e^{i\varphi_0}$．

6．求证平面上的直线方程的一般形式为

$$\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c=0,$$

其中 $\alpha\neq0$ 为复数，c 是实数．

7．求证平面上的圆周方程的一般形式为

$$az\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+c=0,$$

其中 a 与 c 是实数，$a\neq0$ 且 $\alpha\bar{\alpha}>ac$，并用这些参数来表示圆心及半径．

8．求和

(1) $1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$;

(2) $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$.

9．证明：除了一串特殊的点以外，级数

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{z+n}+\cdots$$

收敛，但不绝对收敛.

10. 证明 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明其几何意义.

11. 试用不同于书中的方法证明第一节中的三角不等式 (21)，以及等号成立的条件.

12. 求经过点 z_1 及 z_2 的直线方程.

13. 证明：(1) 若 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 为复平面上的四个点，则向量 $\overrightarrow{\beta\alpha}$ 和 $\overrightarrow{\delta\gamma}$ 之间的夹角为 $\arg\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$；(2) 过两点 α, β 的直线和过两点 γ, δ 的直线相平行的条件为

$$\operatorname{Im}\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=0;$$

相垂直的条件为

$$\operatorname{Re}\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=0.$$

14. (1) 已知 $\arg\alpha=\theta_0$，求证 $\arg\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}=2\theta_0$；

(2) 三点 α, β, γ，共线的充要条件为：

$$\operatorname{Im}\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}=0, \quad 即 \quad \begin{vmatrix}\alpha & \bar{\alpha} & 1\\ \beta & \bar{\beta} & 1\\ \gamma & \bar{\gamma} & 1\end{vmatrix}=0;$$

(3) 四个点 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆的充要条件为

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}=实数.$$

15. 证明下列三点：$1+4i, 2+7i, 3+10i$ 在同一条直线上.

16. 证明以三个点 α, β, γ 构成的三角形是正三角形的充要条件为：$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$.

17. 三角形 ξ_1, ξ_2, ξ_3 与三角形 w_1, w_2, w_3 相似的充要条件为：

$$\frac{\xi_2-\xi_3}{\xi_1-\xi_3}=\frac{w_2-w_3}{w_1-w_3}.$$

18. 证明以 z_1 及 z_2 为直径的两端的圆周方程是

$$\operatorname{Re}\frac{z_2-z_1}{z-z_1}=1,$$

且圆内的点满足 $\mathrm{Re}\,\dfrac{z_2-z_1}{z-z_1}>1$；圆外的点满足

$$\mathrm{Re}\,\frac{z_2-z_1}{z-z_1}<1.$$

19．设 $|\alpha|<1$，$|\beta|<1$，求证 $\left|\dfrac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|<1$.

20．证明：在条件 $c_0>c_1>\cdots>c_n>0$ 下，多项式

$$P_n(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n$$

在闭圆 $|z|\leqslant 1$ 上无根.

21．考虑在单位圆 $|z|<1$ 内，顶点在 $(1,\ 0)$、张角为 $2\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的扇形：$|z-1|<\cos\alpha$，$|\arg(z-1)-\pi|<\alpha$. 求证

$$\frac{|1-z|}{1-|z|}<2\sec\alpha.$$

22．设 n 边形的 n 个顶点为 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$. 求证此 n 边形中任何一个点 z 有表示式

$$z=\lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\cdots+\lambda_nz_n,$$

其中 $\lambda_1\geqslant 0,\ \lambda_2\geqslant 0,\ \cdots,\ \lambda_n\geqslant 0$ 且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$.

23．若 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$，求证

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_2+a_nb_1}{n}=ab.$$

[提示：考虑

$$\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_2+a_nb_1}{n}-ab$$

$$=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(a_jb_{n-j+1}-ab)}{n}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(a_jb_{n-j+1}-ab_{n-j+1})}{n}$$

$$+\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(ab_{n-j+1}-ab)}{n},$$

然后将求和适当分成几部分再讨论.]

第二章

解析函数

在客观现象中，有很多物理量（如速度、加速度、电场强度、磁场强度等），若用复数作为变量去刻划，则在研究过程中会感到十分方便. 在大量实际问题中，人们经常接触到的是变量之间的相互关系即复变函数，并且还不是一般的复变函数，而是具有某种特性的函数，这就是所谓"解析函数". 在这一章中，首先定义复变函数以及它的导数，然后引入解析函数的概念并对解析函数的实部及虚部进行研究. 以后可以看到：解析函数以及它的实部和虚部有很多重要的性质.

第一节 复变函数

1.1 复变函数的概念

考虑平面上的电场，每一点 (x, y) 上的电场强度是一个向量 $I=(I_x, I_y)$，它与点 (x, y) 的位置有关. 我们可以把 I 看作复数 $I=I_x+iI_y$，它是依赖于点 $z=(x, y)$ 的函数，记作 $I=I(z)$，这就是复变量 z 的函数. 下面严格地给出复变函数的定义.

定义1 设 E 为平面点集. 若对于 E 内每一个复数 z，按照一定的规律，有一个复数 w 与之对应，则称 w 为 z 的函数（单值函数），记作 $w=f(z)$，点集 E 称为这个函数的自变量 z 的定义域，w 称为因变量.

如果对于自变量 $z\in E$，对应着几个或无穷多个值 w，则

称在 E 上确定了一个多值函数 $w=f(z)$.

今后，如果不作特别声明，都是指单值函数. 但是以后也要研究多值函数，因为它在很多情况下，也是非常有用的.

设 $w=f(z)$ 是确定在 E 上的单值或多值函数，那么它的实部及虚部都是确定在 E 上的二元函数. 例如，$w=f(z)=u+iv$，其实部 u 与虚部 v 就是定义在 E 上的 x 与 y 的实函数: $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$. 反过来，若在 E 上给定了两个二元函数 $u=u(x, y)$ 与 $v=v(x, y)$，则 $w=u(x, y)+iv(x, y)$ 就是在 E 上确定了一个复变函数，不妨记作 $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$，其中 $z=x+iy$.

在微积分学中，常常把函数用几何图形表示出来(例如把二元单值函数 $u=u(x, y)$ 用空间的曲面来表示)，这样在研究函数的性质时，这些几何图形就会使我们得到很多直观的启示及帮助. 但是，在研究复变函数时，由于自变量 z 是复数，且因变量 w 也是复数，所以就不能通过同一个平面或同一个空间上的几何图形来表示复变函数. 而需要把复变函数看作两个复平面点集之间的对应. 具体地说，函数 $w=f(z)$ 给出 z 平面上点集 E 与 w 平面上点集 P 之间的一个对应关系，其中 P 是函数 $w=f(z)$ 所有能取到的值所构成的集合 (见图 2-1). 这种对应关系显然具有下列性质:

1) 对于点集 E 中的每一点 z，相应的点 $w=f(z)$ 是 P

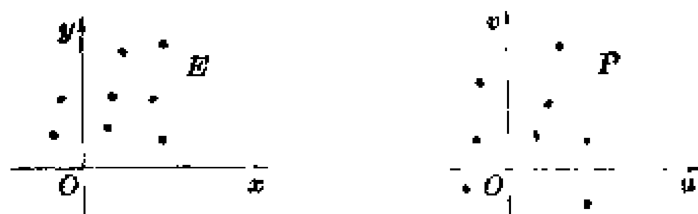


图 2-1

中的一个点；

2) 对于点集 P 中的每一点 w，在 E 中至少有一个点 z 与之相对应，即满足 $w=f(z)$.

因此可以说，函数 $w=f(z)$ 将点集 E 变换到点集 P，$w=f(z)$ 也称为一个变换或映射．如果我们对这个变换的性质搞清楚了，那么对函数的性质也就清楚了，反之亦然．在第七章中，我们将从变换的特性来研究函数．

定义 2 若 P 中每一个点 w，通过关系式 $w=f(z)$ 只有一个点 $z\in E$ 与之相对应，则在 P 上也确定了一个单值函数，记作 $z=g(w)$，它就称为函数 $w=f(z)$ 的反函数或称变换 $f(z)$ 的逆变换．若在 P 中存在点 w，通过关系式 $w=f(z)$ 在 E 中至少有两个点与之相对应，则在 P 上就确定了一个多值函数，仍记作 $z=g(w)$，它也称为变换 $f(z)$ 的逆变换．但是，一般说来，它已能够将一个点 w 变成多个点了．

从反函数的定义可以看出，对于任意的 $w\in P$，有 $w=f[g(w)]$，且当反函数是单值函数时，也有 $z=g[f(z)]$，$z\in E$.

【例 1】 设 E 为全平面，$w=z^2$ 的反函数 $z=\sqrt{w}$ 就是一个多值函数，因为对于 w 平面上的每一个值 $w=|w|e^{i\arg w}$，在 E 上有两个值 $z_1=|w|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\arg w}{2}}$，$z_2=|w|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\arg w+2\pi}{2}}$ 与之相对应.

1.2 复变函数的极限与连续

大量客观现象中所反映出来的复变函数是连续的．为了确切地定义复变函数的连续概念，下面先引出复变函数的极限的概念.

定义 3 设 E 是复平面上的点集，z_0 是 E 的一个凝聚

点，而函数 $w=f(z)$ 定义在 E 上．若存在复数 l，使得对于任意给定的实数 $\varepsilon>0$，都存在实数 $\delta>0$，使当 $z\in E$ 及 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，都满足

$$|f(z)-l|<\varepsilon, \tag{1}$$

则称函数 $f(z)$ 当 z 在 E 中趋向于 z_0 时有极限 l，并记作

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}} f(z)=l. \tag{2}$$

如果 E 包含有 z_0 的邻域 $S(z_0)$ 或包含有 z_0 的邻域除去 z_0 的点集，则极限关系(2)就简单地写为

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=l.$$

极限的概念有很清楚的几何意义：以复数 l 为中心，半径为 $\varepsilon>0$ 作一个圆 $S_\varepsilon(l)$，则可以找到 z_0 的一个充分小的邻域——它可以是半径为 δ、中心为 z_0 的圆 $S_\delta(z_0)$，当 $z\in E$，$z\neq z_0$ 进入这个邻域中时，对应的值 $w=f(z)$ 就位于圆 $S_\varepsilon(l)$ 中(见图 2-2)．这个直观的几何意义与微积分学中极限的直观意义是类似的，但是这里用圆代替了在那里的区间．

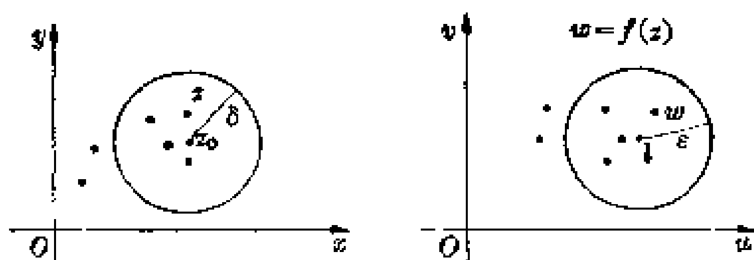


图 2-2

容易证明，微积分学中有关极限的运算在这里也成立．

定理 1 设 E 是复平面上的点集，z_0 是 E 的凝聚点，而函数 $w=f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 定义在 E 上，且满足

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}} f_1(z)=l_1,\quad \lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}} f_2(z)=l_2.$$

则 1) $$\lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}} (f_1(z)\pm f_2(z))=l_1\pm l_2;$$

2) $$\lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}} f_1(z)\cdot f_2(z)=l_1\cdot l_2;$$

3) $$\lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}} \frac{f_1(z)}{f_2(z)}=\frac{l_1}{l_2},\quad 这里\ l_2\neq 0.$$

定理的证明象在微积分学中一样，只是这里用三角不等式代替了那里用的绝对值不等式。请读者自己证明。

定理2 设 E 是复平面上的点集，z_0 是 E 的凝聚点，而函数 $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 定义在 E 上，则存在

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}} f(z)=l=l_1+il_2$$

的充要条件是

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}} u(x, y)=l_1 \quad 及 \quad \lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}} v(x, y)=l_2.$$

【证】 利用第一章第一节中的不等式(2)，容易得到

$$|u(x, y)-l_1|\leqslant|f(z)-l|,$$
$$|v(x, y)-l_2|\leqslant|f(z)-l|$$

及 $$|f(z)-l|\leqslant|u(x, y)-l_1|+|v(x, y)-l_2|.$$

根据极限的定义，由前两个不等式可证得定理的必要性；而由后一个不等式可证得定理的充分性. 】

类似地，可以定义函数 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时以 ∞ 为极限；当 $z\to\infty$ 时函数 $f(z)$ 的极限.

下面引入函数连续的概念.

定义4 设 E 是复平面上的点集，z_0 是 E 的一个凝聚点，$z_0\in E$，而函数 $w=f(z)$ 定义在 E 上. 若 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}} f(z)=f(z_0)$，

即任给 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使得当 $z\in E$，且满足 $|z-z_0|<\delta$ 时，总有

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon.$$

则称函数 $w=f(z)$ 沿着集合 E 在点 $z=z_0$ 处连续.

若复平面的集合 E 上的每一点都是 E 的凝聚点（如区域、闭区域、连续曲线、有界闭集等），且函数 $w=f(z)$ 在 E 上每一点都连续，则称函数 $f(z)$ 在 E 上连续.

定理 3 设 E 是复平面上的点集，z_0 是 E 的凝聚点，$z_0\in E$. 若函数 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 在点 z_0 处连续，则

1) 函数 $f_1(z)\pm f_2(z)$ 在 z_0 处连续；

2) 函数 $f_1(z)\cdot f_2(z)$ 在 z_0 处连续；

3) 函数 $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ 当 $f_2(z_0)\neq 0$ 时，在 z_0 处也连续.

对于在 E 上连续的函数，也有这三个性质.

定理 4 设 E 是复平面上的点集，z_0 是 E 的凝聚点，而函数 $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 定义在 E 上，则函数 $f(z)$ 在 z_0 处连续的充分必要条件是：它的实部 $u=u(x, y)$ 及虚部 $v=v(x, y)$ 都在 z_0 处连续.

对于在 E 上连续的函数上述结论也成立.

由于连续性的概念是通过极限来定义的，而对于极限，有定理 1 及定理 2. 只要注意到定理 1 中的 l_1 就是这里的 $f_1(z_0)$，l_2 就是这里的 $f_2(z_0)$，就可得到定理 3；如果注意到定理 2 中的 l_1 就是这里的 $u(x_0, y_0)$，l_2 就是这里的 $v(x_0, y_0)$，就可得到定理 4.

【例 2】 函数 $w=f(z)=az+b$ 在全平面上连续，其中 a 与 b 为复常数.

解： 若 $a=0$，则 $f(z)\equiv b$，显然它在全平面上连续. 若

$a\neq 0$, 对于任意点 z_0, 有

$$|f(z)-f(z_0)|=|a||z-z_0|.$$

因此, 任给 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{|a|}$, 当 $|z-z_0|<\delta$ 时, 由上式就得到

$$|f(z)-f(z_0)|<|a|\cdot\frac{\varepsilon}{|a|}=\varepsilon.$$

这就证明了连续性.

为了说明这个函数的几何意义, 在 $a\neq 0$ 时, 令 $\zeta=az$, 因此 $w=\zeta+b$. 已知

$$|\zeta|=|a||z|, \quad \operatorname{Arg}\zeta=\operatorname{Arg}a+\operatorname{Arg}z.$$

因而可以认为, 这个函数将任意一个向量 z 放大 $|a|$ 倍, 同时旋转角度 $\operatorname{Arg}a$, 最后再按向量相加的平行四边形法则加上向量 b 就得到向量 w.

【例 3】 函数 $w=\frac{1}{z}$ 在全平面上除了 $z=0$ 以外是连续的.

解: 由于函数 $\frac{1}{z}$ 的分子及分母都是全平面上的连续函数, 因此根据定理 3, 当 $z\neq 0$ 时, 函数 $\frac{1}{z}$ 是连续函数.

设 $z=re^{i\theta}$, 则 $w=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$, 即

$$|w|=\frac{1}{|z|}, \quad \operatorname{Arg}w=-\operatorname{Arg}z.$$

这表示首先将 z 作单位圆的对称变换, 即在向量 z 的方向, 求一个向量 ζ, 使 ζ 的长度 $|\zeta|$ 与 z 的长度 $|z|$ 相乘为 1, 然后再作关于实轴的对称变

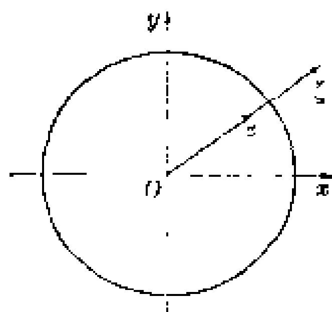


图 2-3

换即得(见图 2-3).

最后，应该指出，在微积分学中，一个在闭区间上连续的函数有三个重要性质，即：有界性、达到最大值与最小值的性质及一致连续性．这里，关于复连续函数也有这样的三个性质，即下述定理：

定理 5 设 F 是复平面上的有界闭集，而函数 $w=f(z)$ 在 F 上连续，则有

1) 函数 $f(z)$ 在闭集 F 上有界，即存在常数 M，使得对于任何点 $z\in F$，都有 $|f(z)|\leqslant M$；

2) 函数 $|f(z)|$ 在闭集 F 上达到最大值与最小值，即在闭集 F 上存在点 z' 及 z''，使得

$$|f(z')|\geqslant|f(z)|,\quad z\in F;$$
$$|f(z'')|\leqslant|f(z)|,\quad z\in F.$$

3) 函数 $f(z)$ 在闭集 F 上一致连续，即任给 $\varepsilon>0$，总可以找到数 $\delta>0$，使得对于 F 上的任意两个点 z_1 及 z_2，只要满足 $|z_1-z_2|<\delta$，就有

$$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon.$$

【证】 首先证明性质 1)：若闭集 F 是由有限多个点所构成的，显然函数在 F 上是有界的．因此我们假设闭集 F 是由无穷多个点所构成的．

用反证法：设函数 $f(z)$ 在 F 上是无界的，因此对于任意的自然数 n，存在不同的点 $z_n\in F$，使得 $|f(z_n)|\geqslant n$ $(n=1, 2, \cdots)$．点列 $\{z_n\}$ 都属于 F，因此是有界的．根据第一章定理 5，在 $\{z_n\}$ 中必存在一个子序列 $\{z_{n_i}\}$ 收敛于某个点 z_0，即 $\lim\limits_{n_i\to+\infty} z_{n_i}=z_0$．由于 F 是闭集，因此有 $z_0\in F$．根据定理的条件，函数 $f(z)$ 在 z_0 处连续，因此任给 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使

得当 $z\in F$，且满足 $|z-z_0|<\delta$ 时，总有

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon. \tag{3}$$

因而用三角不等式就得到

$$|f(z)|\leqslant|f(z_0)|+\varepsilon. \tag{4}$$

另一方面，由于点列 $\{z_{n_i}\}$ 收敛到 z_0，因此对于 δ，必存在数 N，当 $n_i>N$ 时，有

$$|z_{n_i}-z_0|<\delta. \tag{5}$$

因而由(3)或(4)得到

$$|f(z_{n_i})|\leqslant|f(z_0)|+\varepsilon.$$

而这与

$$|f(z_{n_i})|\geqslant n_i\to+\infty$$

相矛盾．从而证明了性质 1)．

下面证明性质 2)：从性质 1) 知道

$$\sup_{z\in F}|f(z)|=M_0<+\infty.$$

因而有

$$M_0\geqslant|f(z)|,\quad z\in F. \tag{6}$$

根据上确界的定义，可以在 F 中找到序列 $\{z'_n\}$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}|f(z'_n)|=M_0. \tag{7}$$

同样由于 $\{z'_n\}$ 属于 F，因此 $\{z'_n\}$ 是有界的．根据第一章定理 5，存在子序列 $\{z'_{n_i}\}$ 收敛于某个点 z'：

$$\lim_{n_i\to+\infty}z'_{n_i}=z'. \tag{8}$$

由于 F 是闭集，因此 $z'\in F$．

根据定理的条件，函数 $f(z)$ 在点 z' 连续，因此由(8)及连续性的定义，知道

$$\lim_{n_i\to+\infty}f(z'_{n_i})=f(z'). \tag{9}$$

由(9)容易证明（留给读者自证）

$$\lim_{n_i\to+\infty}|f(z'_{n_i})|=|f(z')|. \tag{10}$$

比较(7)及(10)，得到 $|f(z')|=M_0$，从而由(6)得到

$$|f(z')|\geqslant|f(z)|,\quad z\in F.$$

即在 F 上存在点 z'，使函数在此点的模达到最大值.

关于存在点 $z''\in F$，使函数在此点的模达到最小值，用上述方法也可证明.

最后证明性质 3)：也用反证法：假设性质 3)不成立，则必存在一个数 $\varepsilon_0>0$，使得对于任意小的正数，例如取 $\frac{1}{n}$ ($n=1, 2, \cdots$)，必存在两个点 $z_n^{(1)}$ 及 $z_n^{(2)}$，虽然满足

$$|z_n^{(1)}-z_n^{(2)}|<\frac{1}{n}, \tag{11}$$

但有

$$|f(z_n^{(1)})-f(z_n^{(2)})|\geqslant\varepsilon_0>0. \tag{12}$$

同样应用上述证明的方法，由于 $\{z_n^{(1)}\}$ 及 $\{z_n^{(2)}\}$ 的有界性，根据第一章中的定理 5，可以认为存在子序列 $\{z_{n_i}^{(1)}\}$ 及 $\{z_{n_i}^{(2)}\}$，它们分别收敛于点 $z^{(1)}$ 及 $z^{(2)}$：

$$\lim_{n_i\to+\infty} z_{n_i}^{(1)}=z^{(1)},\quad \lim_{n_i\to+\infty} z_{n_i}^{(2)}=z^{(2)}. \tag{13}$$

由于 F 是闭集，因而 $z^{(1)}\in F$, $z^{(2)}\in F$.

由(13)可知，任给 $\varepsilon>0$，存在数 N_1，当 $n_i>N_1$ 时，有

$$|z_{n_i}^{(1)}-z^{(1)}|<\frac{\varepsilon}{3},\quad |z_{n_i}^{(2)}-z^{(2)}|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{14}$$

同理由(11)可知，存在 N_2，使得当 $n>N_2$ 时，有

$$|z_n^{(1)}-z_n^{(2)}|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{15}$$

由(14)及(15)得到

$$\begin{aligned}|z^{(1)}-z^{(2)}|&\leqslant|z^{(1)}-z_{n_i}^{(1)}|+|z_{n_i}^{(1)}-z_{n_i}^{(2)}|+|z_{n_i}^{(2)}-z^{(2)}|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

(只要选择 $n_i \geqslant \max(N_1, N_2)$就行.) 由于 ε 的任意性, 故可推出 $z^{(1)}=z^{(2)}$. 根据定理的条件, 函数 $f(z)$ 在点 $z^{(1)}=z^{(2)}$ 处连续, 所以根据连续的定义及极限关系式(13), 就得到了

$$\lim_{n_i \to +\infty} f(z_{n_i}^{(1)}) = f(z^{(1)}) = f(z^{(2)}) = \lim_{n_i \to +\infty} f(z_{n_i}^{(2)}). \qquad (16)$$

在不等式(12)中, 令 $n=n_i \to +\infty$, 利用等式(16), 就得到

$$0=|f(z^{(1)})-f(z^{(2)})| \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

这就引出了矛盾. 因此性质 3)必成立. ▌

习 题 2·1

1. 求下列函数的定义域. 并判断这些函数是否都是定义域中的连续函数:

(1) $w=z^3$; (2) $w=|z|$;

(3) $w=\dfrac{2z-1}{z-2}$; (4) $w=\sqrt{z^2+(2-i)z-2i}$;

(5) $w=\sqrt{z^2-3z+2}$; (6) $w=\sqrt[3]{z^3}$.

2. 讨论函数 $w=e^z=e^x \cdot e^{iy}$, $z=x+iy$ 在从原点出发的射线上趋向于无穷时的极限.

3. 函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 把下列 z 平面上的曲线变成 w 平面上的什么曲线?

(1) $x^2+y^2=4$; (2) $x=1$.

4. 设函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续, 且 $f(z_0)\neq 0$. 求证: 可以找到 z_0 的一个邻域, 函数 $f(z)$ 在此邻域内取的值不为零.

第二节 解析函数的概念

2.1 复变函数的导数

复变函数的导数定义的形式与微积分学中导数定义的形式是一样的.

定义1 设函数 $w=f(z)$ 在 $z=z_0$ 的邻域 $S(z_0)$ 上有定义，考虑比值

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},$$

若 z 不论以什么方式趋向于 z_0 时，上式都存在极限，则称这个极限值为函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处的导数，记作 $f'(z_0)$，并说函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处可导，即

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0) \quad 或 \quad [f(z_0)]'. \qquad (1)$$

象在微积分学中一样，若函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处有导数 $f'(z_0)$，则它在这点连续．事实上，由导数的定义知道，任给数 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，总有

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\varepsilon.$$

因而有 $\quad |f(z)-f(z_0)|\leqslant(|f'(z_0)|+\varepsilon)|z-z_0|.$

由此推出：任给数 $\varepsilon_1>0$，可以选择 δ_1，满足

$$(|f'(z_0)|+\varepsilon)\delta_1<\varepsilon_1,$$

使得当 $0<|z-z_0|<\delta_2=\min(\delta,\ \delta_1)$ 时，有

$$|f(z)-f(z_0)|\leqslant(|f'(z_0)|+\varepsilon)\delta_2<\varepsilon_1.$$

这就证明了函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处是连续的．

【例1】 求证函数 $f(z)=z$ 在平面上处处有导数为1．

解：对任意点 z_0，有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{z-z_0}=1.$$

【例2】 求证函数 $f(z)=z^n$ 在平面上处处有导数为 nz^{n-1}（其中 n 为自然数）．

解：对任意点 z_0，有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{z\to z_0}\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+zz_0^{n-2}+z_0^{n-1})}{z-z_0}$$

$$=nz_0^{n-1}.$$

上面最后一个等式是利用极限的性质得到的(参看上节定理1).

【例 3】 求证函数 $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z$ 只在 $z=0$ 处才有导数.

解: 在 $z=0$ 处

$$\lim_{z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{z\to 0}\frac{z\,\mathrm{Re}\,z}{z}=0.$$

在 $z=z_0\neq 0$ 处, 令 $z=x+iy$, $z_0=x_0+iy_0$, 有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{z\to z_0}\frac{z\,\mathrm{Re}\,z-z_0\,\mathrm{Re}\,z_0}{z-z_0}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{(z-z_0)\mathrm{Re}\,z}{z-z_0}+\frac{z_0(\mathrm{Re}\,z-\mathrm{Re}\,z_0)}{z-z_0}\right]$$

$$=\lim_{z\to z_0}\left[x+z_0\cdot\frac{x-x_0}{z-z_0}\right].$$

现在我们规定 z 以两种特殊方法趋向于 z_0 时, 分别计算其极限值. 第一种方法: 令 $x=x_0$, $y\to y_0$, 则由上式得

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\(x=x_0)}}\frac{\Delta w}{\Delta z}=x_0.$$

第二种方法: 令 $y=y_0$, $x\to x_0$, 则由上式得

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\(y=y_0)}}\frac{\Delta w}{\Delta z}=2x_0+iy_0.$$

所以这两个极限值当 $z_0\neq 0$ 时是不相等的. 这说明了函数 $z\,\mathrm{Re}\,z$ 在 $z=z_0\neq 0$ 处没有极限.

函数 $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z=x^2+ixy$ 的实部 $u(x,y)=x^2$, 虚部 $v(x,y)=xy$, 它们是两个"很好"的函数, 即有任意阶连续偏

导数．但是，函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 作为复函数时，就没有导数．这说明了：尽管复函数的导数定义在形式上与实函数的导数定义一样，但实际上，要求却高得多．由于当 $z\to z_0$ 时，可以要求在平面上以任何方式趋向于点 z_0 时，$\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 都要有同一个极限值；但在实函数中，当 $x\to x_0$ 时，只要求在直线上以任何方式趋向于点 x_0 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 都要有同一个极限值就够了．显然，前者的要求高得多，因为这里已经是一个二重极限的问题了：当 $x\to x_0$ 及 $y\to y_0$ 时，$\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 才能有极限值．下面研究，在什么情况下函数有导数的条件．

2.2 解析函数及其性质

在很多理论及实际问题中，需要研究的是区域内的解析函数，下面给出它的定义．

定义 2 若函数 $w=f(z)$ 在 $z=z_0$ 的邻域 $S(z_0)$ 上有定义，且在此邻域中函数 $f(z)$ 处处有导数，则称函数 $w=f(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析．若函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内有定义，且在 D 内处处有导数，则称函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，或称 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数．

容易看出，函数在区域内解析与函数在区域内处处解析的说法是等价的．以后可以见到，区域内的解析函数有一系列的重要性质及一整套的理论．例如区域内解析函数的导数仍是此区域内的解析函数等等．这样的结果在微积分学中是没有的．这些都是以后要研究的内容．请读者在今后的学习过程中，一方面要注意复变函数与实变函数的性质有哪些类似之处；另一方面还要注意它们之间有什么不同，以及从实变

函数推广到复变函数后所带来的优越性.

从本节例 2 可看出，函数 z^n (n 是正整数) 是全平面上的解析函数. 而从例 3 可看出，函数 $f(z)=z\operatorname{Re}z$ 在全平面上处处不解析: 在 $z=0$ 处尽管存在导数，但在 $z=0$ 的邻域中，除了 $z=0$ 以外，处处没有导数.

下面叙述解析函数的运算. 它也有类似于微积分学中导数的运算法则，有下列定理:

定理 1 设函数 $w=f_1(z)$ 及 $w=f_2(z)$ 都在区域 D 内解析，则函数 $f_1(z)\pm f_2(z)$、$f_1(z)\cdot f_2(z)$ 及 $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ (在 $f_2(z)\neq 0$ 时) 也都在 D 内解析，并且:

1) $[f_1(z)\pm f_2(z)]'=f_1'(z)\pm f_2'(z)$;

2) $[f_1(z)\cdot f_2(z)]'=f_1'(z)f_2(z)+f_1(z)f_2'(z)$;

3) $\left[\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]'=\dfrac{f_1'(z)f_2(z)-f_1(z)f_2'(z)}{[f_2(z)]^2},\quad f_2(z)\neq 0.$

这个定理的证明与微积分学中相应定理的证明相同. 留给读者自证.

应用这个定理，由本节例 2 可以看出: 任意一个多项式是全平面上的解析函数; 任意一个有理函数，即分子与分母都是多项式，在分母不为零的点上也都是解析的.

关于解析函数的复合函数有下列定理:

定理 2 设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，且函数 $w_1=g(w)$ 在区域 G 内解析. 若对于 D 内任一点 z，其对应的函数值 w 位于区域 G 内，则函数 $w_1=g[f(z)]$ 在 D 内有定义且解析，并有

$$\{g[f(z)]\}'=g'[f(z)]\cdot f'(z). \tag{2}$$

【证】 对任意点 $z_0\in D$，按条件 $w_0=f(z_0)\in G$，且由于

函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处有导数，因而连续，这表示可以找到一个充分小的邻域 $S(z_0)$，使得对于 $S(z_0)$ 中点 z，都有 $w=f(z)\in G$，且在 w_0 的邻域中.

由于函数 $w_1=g(w)$ 在 $w=w_0$ 处解析，按定义，任给数 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使得当

$$0<|w-w_0|<\delta \tag{3}$$

时，有

$$\left|\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}-g'(w_0)\right|<\varepsilon. \tag{4}$$

若令 $\quad \varepsilon(w)=\dfrac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}-g'(w_0),\quad 0<|w-w_0|<\delta.$

即

$$g(w)-g(w_0)=g'(w_0)(w-w_0)+\varepsilon(w)(w-w_0). \tag{5}$$

由(3)及(4)得

$$\lim_{w\to w_0}\varepsilon(w)=0. \tag{6}$$

如果补充定义 $\varepsilon(w_0)=0$，则可以认为公式(5)对 $w=w_0$ 也成立，且由(6)可以认为 $\varepsilon(w)$ 在 $w=w_0$ 处连续：

$$\lim_{w\to w_0}\varepsilon(w)=\varepsilon(w_0)=0. \tag{7}$$

此外，根据上面所述，$f(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续，因此，对上述 $\delta>0$，存在数 $\delta_1>0$，当 $|z-z_0|<\delta_1$ 时，有

$$|w-w_0|=|f(z)-f(z_0)|<\delta.$$

因而，由(5)及(6)得

$$g[f(z)]-g[f(z_0)]=g'[f(z_0)](f(z)-f(z_0))$$
$$+\varepsilon[f(z)](f(z)-f(z_0)) \tag{8}$$

及 $$\lim_{z\to z_0}\varepsilon[f(z)]=\lim_{w\to w_0}\varepsilon(w)=0. \tag{9}$$

由(8)得

$$\frac{g[f(z)]-g[f(z_0)]}{z-z_0}=g'[f(z_0)]\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$
$$+\varepsilon[f(z)]\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

在上面等式中，两边取极限 $z\to z_0$，就得到了(2)．▌

【例 4】 求 $(1+z^2)^n$ 的导数(n 是自然数)．

解：这个函数可以看作是函数 $w_1=w^n$ 及 $w=1+z^2$ 的复合函数．由定理 2 及导数的运算法则，得

$$[(1+z^2)^n]'=n(1+z^2)^{n-1}2z=2nz(1+z^2)^{n-1}.$$

对于上节中引进的反函数，有下列定理：

定理 3 设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $f'(z)\neq 0$，$z\in D$．令 P*) 为 z 在 D 上变化时 $w=f(z)$ 所取得的值的集合(称为值域)．设 $z=\psi(w)$ 是函数 $f(z)$ 的单值反函数，且在 P 上连续，则 $z=\psi(w)$ 在 P 上解析，且

$$\psi'(w)=\frac{1}{f'[\psi(w)]}. \tag{10}$$

【证】 对任意一点 $w_0\in P$，由于 $z=\psi(w)$ 在 $w=w_0$ 处连续，因此当 $w\to w_0$ 时，$z=\psi(w)\to z_0=\psi(w_0)$．从而有

$$\lim_{w\to w_0}\frac{\psi(w)-\psi(w_0)}{w-w_0}=\lim_{w\to w_0}\frac{1}{\dfrac{w-w_0}{z-z_0}}$$
$$=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\dfrac{w-w_0}{z-z_0}}=\frac{1}{f'(z_0)}=\frac{1}{f'[\psi(w_0)]}.$$ ▌

【例 5】 求 n 个函数

$$f_k(w)\triangleq^{**)}(\sqrt[n]{w})_k\triangleq|w|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg w+2k\pi}{n}}\quad(k=0,1,\cdots,n-1)$$

*) 在第七章中将证明 P 是一个区域．

**) 符号"≜"表示"定义为"．

在区域 $\varphi_0<\arg w<\varphi_0+2\pi$ 上的导数(φ_0 为常数).

解：已知这 n 个函数是函数 $w=z^n$ 的 n 个单值反函数，显然，它们在区域 $\varphi_0<\arg w<\varphi_0+2\pi$ 上都是连续函数. 事实上，这只要从它们的模及幅角的连续性就可以看出. 根据定理 3，它们都是区域 $\varphi_0<\arg w<\varphi_0+2\pi$ 上的解析函数，且

$$\frac{d(\sqrt[n]{w})_k}{dw}=\frac{1}{nz^{n-1}}=\frac{1}{nw}(\sqrt[n]{w})_k. \tag{11}$$

以后还可以看到各种解析函数的例子.

习　题　2·2

1. 下列函数在何处有导数？并求出导数来：

(1) $(z-1)^n$;　　(2) $\frac{1}{z^2-1}$;

(3) $\frac{az+b}{cz+d}$，c 与 d 中至少有一个不为零；

(4) $(z^2-1)^2(z^2+1)^2$;　　(5) $\frac{z-2}{(z+1)(z^2+1)}$;

(6) $\bar{z}$;　　(7) $|z|^2z$.

2. 试证明本章第一节的定理 1.

第三节　柯西-黎曼方程

上一节虽然定义了复变函数的导数，但要具体判别一些函数究竟有没有导数，以及如何求出来，却不是一件容易的事. 因为一般说来，极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

是一个二重极限：$x\to x_0$，$y\to y_0$. 所以是非常难求的. 从另一个角度来看：既然复变函数 $w=f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$

是由其实部及虚部作为两个变量 x 与 y 的实函数来定义的，那么是否可由函数 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 的可微性推出 $f(z)$ 的可微性呢？由例 3 看出，即使实部 $u(x, y)$ 及虚部 $v(x, y)$ 有任意阶的连续导数，也推不出函数 $f(z)$ 有导数的性质．那么怎样才能从实部及虚部的可微性来刻划函数本身的可微性呢？经过深入研究，可以发现，当函数 $f(z)$ 有导数时，其实部 $u(x, y)$ 与虚部 $v(x, y)$ 并不是独立的，而是有一定的相互依赖关系；反过来，当这种相互依赖关系满足时，由实部及虚部的可微性也可以推出函数 $f(z)$ 本身的可微性．精确地说，有下列定理：

定理 1　设函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 定义在区域 D 内，而 $z_0=x_0+iy_0$ 是区域 D 中的一个点．若函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处有导数，则其实部 $u(x, y)$ 及虚部 $v(x, y)$ 满足下列两个条件：

1) $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 看作两个变量 x 与 y 的函数时，在点 $z_0=(x_0, y_0)$ 处可微，即存在常数 a, b, c, d，使

$$\begin{aligned} u(x, y)-u(x_0, y_0)&=a(x-x_0)+b(y-y_0)\\ &\quad+\varepsilon_1(x, y)(x-x_0)+\varepsilon_2(x, y)(y-y_0);\\ v(x, y)-v(x_0, y_0)&=c(x-x_0)-d(y-y_0)\\ &\quad+\varepsilon_3(x, y)(x-x_0)+\varepsilon_4(x, y)(y-y_0). \end{aligned} \tag{1}$$

其中
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \varepsilon_i(x, y)=0 \quad (i=1, 2, 3, 4). \tag{2}$$

2) 在点 $z_0=(x_0, y_0)$ 处有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{3}$$

并且在 $z=z_0$ 处有

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4}$$

【证】 先证 1) 因为函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处可微，因此，若令

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)+\varepsilon(z), \tag{5}$$

则
$$\lim_{z\to z_0}\varepsilon(z)=0.$$

设
$$\varepsilon(z)=\varepsilon_5(x, y)+i\varepsilon_6(x, y),$$

则由极限性质(见本章第一节定理 2) 得到

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\varepsilon_5(x, y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\varepsilon_6(x, y)=0. \tag{6}$$

令 $f'(z_0)=A+iB$，其中 A 与 B 分别是复数值 $f(z_0)$ 的实部与虚部，则由等式(5)推出

$$\begin{aligned}&[u(x, y)-u(x_0, y_0)]+i[v(x, y)-v(x_0, y_0)]\\ &\quad=[A(x-x_0)-B(y-y_0)]+i[B(x-x_0)+A(y-y_0)]\\ &\qquad+[\varepsilon_5(x, y)(x-x_0)-\varepsilon_6(x, y)(y-y_0)]\\ &\qquad+i[\varepsilon_6(x, y)(x-x_0)+\varepsilon_5(x, y)(y-y_0)].\end{aligned}$$

分别考虑实部与虚部以后，就得到

$$\begin{aligned}u(x, y)-u(x_0, y_0)&=A(x-x_0)-B(y-y_0)\\ &\quad+\varepsilon_5(x, y)(x-x_0)-\varepsilon_6(x, y)(y-y_0)\end{aligned} \tag{7}$$

及

$$\begin{aligned}v(x, y)-v(x_0, y_0)&=B(x-x_0)+A(y-y_0)\\ &\quad+\varepsilon_6(x, y)(x-x_0)+\varepsilon_5(x, y)(y-y_0).\end{aligned} \tag{8}$$

这就只证明了函数 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的可微性(比较(1)与(7)、(8),取 $\varepsilon_1=\varepsilon_5$、$\varepsilon_2=-\varepsilon_6$、$\varepsilon_3=\varepsilon_6$、$\varepsilon_4=\varepsilon_5$ 即可).

下面证明 2):在公式(7)中,令 $y=y_0$,并将等式两端除以 $x-x_0$ 后取极限,则得到在点 (x_0, y_0) 处

$$\frac{\partial u}{\partial x}=A.$$

同样,在公式(7)中,令 $x=x_0$,并将等式两边除以 $y-y_0$ 后取极限,则得到在点 (x_0, y_0) 处

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-B.$$

由公式(8),用类似上述方法可以得到在点 (x_0, y_0) 处

$$\frac{\partial v}{\partial x}=B, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=A.$$

这就证明了等式(3).

最后,在等式(5)中,令 $y=y_0$, $x\to x_0$,则从等式左端得到

$$\lim_{\substack{y=y_0\\ x\to x_0}}\frac{[u(x, y_0)+iv(x, y_0)]-[u(x_0, y_0)+iv(x_0, y_0)]}{x-x_0}$$

$$=\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

因而由等式(5)及上式,在 (x_0, y_0) 处就有

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由此再利用等式(3)就得到等式(4).】

这个定理说明了:若函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处有导数,那么

要计算其导数值，可以不必从定义出发求第二节中公式(1)的极限值，而直接去求函数 $f(z)$ 的实部与虚部在此点的偏导数值即可，这就带来了很大的方便. 余下的问题，是如何判别函数 $f(z)$ 在某一点 $z=z_0$ 处有导数. 下面的定理（上述定理的逆定理）回答了这个问题.

定理 2 设函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 定义在区域 D 内，而 $z_0=x_0+iy_0$ 是区域 D 中的一个点. 若函数 $f(z)$ 的实部 $u(x, y)$ 与虚部 $v(x, y)$ 满足定理 1 中的两个条件，即若它们在点 $z_0=(x_0, y_0)$ 处可微（见公式(1)），且满足公式(3)，则函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处有导数，且等式(4)成立.

【证】 根据函数 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 在点 $z_0=(x_0, y_0)$ 处可微的假设（即公式(1)成立），可以用定理 1 的证明中的方法，先令 $y=y_0$, $x\to x_0$; 再令 $x=x_0$, $y\to y_0$, 就可以得到

$$
\begin{aligned}
u(x, y)-u(x_0, y_0)=&\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\\
&\times(y-y_0)+\varepsilon_1(x, y)(x-x_0)\\
&+\varepsilon_2(x, y)(y-y_0);
\end{aligned}\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
v(x, y)-v(x_0, y_0)=&\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\\
&\times(y-y_0)+\varepsilon_3(x, y)(x-x_0)\\
&+\varepsilon_4(x, y)(y-y_0).
\end{aligned}\tag{10}
$$

其中 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$、$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$、$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0$ 及 $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0$ 分别表示偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 在点 (x_0, y_0) 处的值. 而 $\varepsilon_1(x, y)$、$\varepsilon_2(x, y)$、$\varepsilon_3(x, y)$ 及 $\varepsilon_4(x, y)$ 满足公式(2).

将等式(10)乘以 i 后与等式(9)相加并利用等式(3)，就可以得到

$$
\begin{aligned}
f(z)-f(z_0)&=[u(x,\ y)-u(x_0,\ y_0)]\\
&\quad+i[v(x,\ y)-v(x_0,\ y_0)]\\
&=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0\right](x-x_0)+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right.\\
&\quad\left.+i\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right](y-y_0)+[\varepsilon_1(x,\ y)+i\varepsilon_3(x,\ y)](x-x_0)\\
&\quad+[\varepsilon_2(x,\ y)-i\varepsilon_4(x,\ y)](y-y_0)\\
&=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0\right](x-x_0)+\left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0-i\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right]\\
&\quad\times i(y-y_0)+[\varepsilon_1+i\varepsilon_3](x-x_0)+[\varepsilon_2+i\varepsilon_4](y-y_0)\\
&=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0\right](x-x_0)+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0\right]\\
&\quad\times i(y-y_0)+[\varepsilon_1+i\varepsilon_3](x-x_0)+[\varepsilon_2+i\varepsilon_4](y-y_0)\\
&=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0\right](z-z_0)+[\varepsilon_1+i\varepsilon_3](x-x_0)\\
&\quad+[\varepsilon_2+i\varepsilon_4](y-y_0). \qquad (11)
\end{aligned}
$$

由第一章中的不等式(2)，得到

$$\left|\frac{x-x_0}{z-z_0}\right|\leqslant 1,\quad \left|\frac{y-y_0}{z-z_0}\right|\leqslant 1.$$

由此，在等式(11)的两端除以 $z-z_0$，再令 $z\to z_0$，利用上面两个不等式及极限(2)，就得到

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0.$$

即 $f'(z_0)$ 存在，因而由(3)就可得到(4)．】

归纳上述定理 1 和定理 2，就可得到函数 $f(z)$ 在区域内解析的充分必要条件如下：

定理 3 设函数 $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$ 在区域 D 内有定义，则它在 D 内解析的充分必要条件是：

1) $u(x,\ y)$ 与 $v(x,\ y)$ 在 D 内处处可微；

2) $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 D 内处处满足一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

这个方程在实际问题中很有用，称为柯西–黎曼 (Cauchy-Riemann) 微分方程，或柯西–黎曼条件（简写为 C.–R. 条件）.

需要强调的是：这两个条件对于函数的解析性来说，都是必不可少的．例如函数

$$f(z)=z\operatorname{Re}z=x^2+ixy$$

在平面上处处不解析．事实上，由于 $u(x, y)=x^2$，$v(x, y)=xy$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=x.$$

它只可能在 $x=0, y=0$ 这一点满足柯西–黎曼条件，而在其他地方不满足，所以它不是解析函数．在本章的复习讨论题中给出一个函数，它在平面上处处满足柯西–黎曼条件，但在个别点上不满足可微性条件，故它在此点没有导数（见第 16 题）.

定理 2 或定理 3 既提供了判别函数解析性的方法，且指出了如何求导数值，用这种方法可避免计算二重极限（可微性可以通过偏导数的连续性看出来，而初等函数是连续可微的），这就给计算导数带来很大的方便.

【例 1】 求证函数 $w=\bar{z}=x-iy$ 在平面上处处不可微.

【证】 设 $w=u(x, y)+iv(x, y)$，则 $u(x, y)=x$，$v(x, y)=-y$．于是得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1.$$

它们处处不满足柯西-黎曼条件，所以处处不可微. ▌

【例 2】 求证函数

$$w=u(x,\ y)+iv(x,\ y)=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

在 $z=x+iy\neq0$ 处解析.

【证】 由于在 $z\neq0$ 处 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 都是可微函数，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

即满足柯西-黎曼条件，因此函数

$$w=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

在 $z\neq0$ 处可微，其导数为

$$\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-(x-iy)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{-(\bar{z})^2}{(z\cdot\bar{z})^2}=-\frac{1}{z^2}.\ ▌$$

最后，应当指出：若函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处有导数，则在求第二节公式(1)的极限时，分别可在 x 轴方向及 y 轴方向求极限，利用这两个极限值相等，就得到柯西-黎曼条件. 可以想象，如果换为其他两个方向，例如在极坐标系中，用向径方向及极角变化的方向，同样也可以得到两个关系式. 有关这些事实，可参看本节习题 2·3 的第 5 题与第 6 题.

习 题 2·3

1. 下列函数在何处满足柯西-黎曼条件?

   (1) $w=3-z+2z^2$; (2) $w=\frac{1}{z}$;

   (3) $w=x$; (4) $w=|z|^2z$;

   (5) $w=z^5$.

2. 函数 $f(z)=xy^2+ix^2y$ 在何处满足柯西-黎曼条件? 在何处有导数? 在何处解析?

3. 设函数 $f(z)=my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$ 是全平面的解析函数, 求 l、m、n 的值.

4. 证明: 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $f'(z)\equiv 0$, 则 $f(z)$ 恒为常数.

5. 设 $f(z)=u(re^{i\theta})+iv(re^{i\theta})$, $z=re^{i\theta}$. 证明: u 与 v 满足柯西-黎曼条件的必要与充分条件是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}\quad (r>0).$$

6. 设函数 $f(z)$ 定义在区域 D 上, 考虑区域 D 内任一点上的两个互相垂直的方向 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}$, 其中由 $\boldsymbol{s}$ 到 $\boldsymbol{n}$ 是按逆时针方向. 证明:函数 $f(z)$ 在 D 内解析的充分与必要条件是:

   (1) $f(z)$ 的实部与虚部在 D 内可微;

   (2) 在 D 内每一点上,满足

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{s}}=\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}},\quad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=-\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{s}}.$$

   并由这个结果验证第 5 题.

7. 求证函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在 $z=0$ 处满足柯西-黎曼条件, 但它在 $z=0$ 处没有导数.

第四节 初等解析函数

在本章第二节中曾经讲过, 幂函数 $w=z^n$ 在全平面上解

析．其反函数 $z=\sqrt[n]{w}$，或写成 $w=\sqrt[n]{z}$，若取其 n 个分支函数 $(\sqrt[n]{z})_k=|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$，则在全平面上除去射线 $\arg z=\theta_0$ 后的区域即 $\theta_0<\arg z<\theta_0+2\pi$ (θ_0 为实数)上解析．多项式在全平面上解析．有理函数在全平面上除去分母为零的点以外也在全平面上解析．这些函数都可以看作是微积分学中相应的实变量函数的推广．在微积分学中，还有其他一些初等函数，如指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数、双曲函数以及反双曲函数等等．这些函数在复数域上应该取什么形式？它们是否也有导数？这些问题都是这一节要讨论的．

1．指数函数

在第一章第一节中曾经对任何实数 y，定义

$$e^{iy}\triangleq\cos y+i\sin y.$$

它具有指数函数的性质，称为欧拉(Euler)公式．对于任意的复数 $z=x+iy$，自然可规定

$$e^z\triangleq e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y),\tag{1}$$

称为指数函数，显然有

$$|e^z|=e^x,\ \mathrm{Arg}\,e^z=y+2k\pi\quad(k\text{ 是整数}).\tag{2}$$

显然，当 z 的实部 $x=0$ 时，就得到上述的欧拉公式，所以 (1) 是欧拉公式的推广．可以证明，指数函数 e^z 具有下列几个重要的性质：

(1) 对于任何复数 z，$e^z\neq 0$；

(2) 对于任意两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$，有

$$e^{(z_1+z_2)}=e^{z_1}\cdot e^{z_2};\tag{3}$$

(3) 函数 e^z 有且仅有周期为 $2\pi i$ (至多相差 $2\pi i$ 的整数倍)，即 $e^{z+2\pi i}=e^z$；

(4) $(e^z)'=e^z$; (4)

事实上，对于性质 (1)：若 $e^z=0$，则其模 $|e^z|=0$，而这是不可能的. 对于性质 (2)：由上面公式 (1) 及第一章中函数 e^{iy} 的指数性质(见第一章第一节公式(9))可以得到

$$e^{(z_1+z_2)}=e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}\triangleq e^{(x_1+x_2)}\cdot e^{i(y_1+y_2)}$$

$$=e^{x_1}\cdot e^{x_2}\cdot e^{iy_1}\cdot e^{iy_2}\triangleq e^{x_1+iy_1}\cdot e^{x_2+iy_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}.$$

对于性质(3)，显然有

$$e^{z+2\pi i}\triangleq e^{x+2\pi i}\cdot e^{iy}=e^x\cdot e^{iy}\triangleq e^{x+iy}=e^z.$$

如果还有周期为 $\omega=\omega_1+i\omega_2$，即 $e^{z+\omega}=e^z$ 时，则有

$$e^{x+\omega_1}\cdot e^{i(y+\omega_2)}=e^x\cdot e^{iy}.$$

比较上式两端的模与幅角，就得到

$$x+\omega_1=x \quad 及 \quad y+\omega_2=y+2k\pi \quad (k 是整数),$$

由此得到 $\omega_1=0,\ \omega_2=2k\pi,$

即 $\omega=2k\pi i$ 为 $2\pi i$ 的整数倍. 对于性质 (4)：设 $e^z=u(x, y)+iv(x, y)$，根据前面公式(1)，得

$$u(x, y)=e^x\cos y,\quad v(x, y)=e^x\sin y.$$

这两个函数在全平面上都是可微函数，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y.$$

即满足柯西–黎曼方程. 根据第三节定理 3，e^z 是全平面上的解析函数，且

$$\frac{d(e^z)}{dz}\triangleq(e^z)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^z.$$

若从本章第二节定义 1 出发，直接用导数的定义来证明性质(4)是比较麻烦的，有兴趣的读者不妨试证一下.

2. 对数函数

对数函数 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 是作为函数 $z=e^w$ 的反函数而定义的. 容易看出，对于任意一点 z，有无穷多个 w 的值与它相对应. 事实上，设

$$z=|z|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z},\quad w=u+iv,$$

比较 $z=e^w$ 两端的模与幅角，则得到

$$|z|=e^u,\quad \mathrm{Arg}\,z=v, \tag{5}$$

即
$$w=\mathrm{Ln}\,z=u+iv=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z$$
$$=\ln|z|+i\arg z+2\pi ki\quad (k\text{ 为任意整数}). \tag{6}$$

其中
$$0\leqslant\arg z<2\pi$$

或
$$\theta_0\leqslant\arg z<\theta_0+2\pi\quad (\theta_0\text{ 为任意实数}). \tag{7}$$

由此看出 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 有无穷多个值. 设

$$(\mathrm{Ln}\,z)_k=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i\quad (k\text{ 为任意固定的整数}), \tag{8}$$

这些函数值之间的差为 $2\pi i$ 的整数倍. $(\mathrm{Ln}\,z)_k$ 称为 $\mathrm{Ln}\,z$ 的第 k 个分支，显然它在区域

$$0<\arg z<2\pi\quad\text{或}\quad -\pi<\arg z<\pi$$

内连续，因此根据反函数的导数定理(见本章第二节定理 3)，得

$$(\mathrm{Ln}\,z)'_k=\frac{1}{(e^w)'}\bigg|_{w=(\mathrm{Ln}\,z)_k}=\frac{1}{e^w}\bigg|_{w=(\mathrm{Ln}\,z)_k}=\frac{1}{z}. \tag{9}$$

即任何一个分支的导数值都相等，且为 $\dfrac{1}{z}$.

特别当 $k=0$ 时，$(\mathrm{Ln}\,z)_0\triangleq\ln z=\ln|z|+i\arg z$,

其中
$$0\leqslant\arg z<2\pi\quad\text{或}\quad -\pi\leqslant\arg z<\pi,$$

它是实函数 $\ln x$ 在复平面上的推广.

对于对数函数的积与商，有下列两个性质. 设 $z_1\neq0$, $z_2\neq0$, 则

(1) $\operatorname{Ln}(z_1\cdot z_2)=\ln|z_1\cdot z_2|+i\operatorname{Arg}z_1\cdot z_2$

$$=\ln|z_1|+\ln|z_2|+i\operatorname{Arg}z_1+i\operatorname{Arg}z_2$$

$$=\operatorname{Ln}z_1+\operatorname{Ln}z_2; \tag{10}$$

(2) $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\ln\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|+i\operatorname{Arg}\dfrac{z_1}{z_2}$

$$=\ln|z_1|-\ln|z_2|+i\operatorname{Arg}z_1-i\operatorname{Arg}z_2$$

$$=\operatorname{Ln}z_1-\operatorname{Ln}z_2. \tag{11}$$

公式(10)与(11)应该理解为：当(10)或(11)中等式右端的对数任取一个其分支所给的值以后，左端也一定有一个分支的值与右端的值相等.

3. 幂函数

对任意的复数 α，当 $z\neq 0$ 时，定义

$$z^\alpha \triangleq e^{\alpha\operatorname{Ln}z}=e^{\alpha(\ln|z|+i\arg z+2k\pi i)}\quad (k\text{ 为任意整数}). \tag{12}$$

由于 $\operatorname{Ln}z$ 的多值性，所以一般说来，z^α 是一个多值函数. 当 $z=0$ 时，只有在 α 是正实数时，才规定 $z^\alpha=0$.

幂函数有下列几个性质：

(1) 当 $\alpha=n$，n 是正整数时，z^α 是单值函数，且 $z^\alpha=z^n$，它就是函数 z 自乘 n 次而得到的函数. 事实上，从上面定义中的等式(12)得到

$$z^n\triangleq e^{n\operatorname{Ln}z}=e^{n(\ln|z|+i\arg z+2k\pi i)}=e^{n(\ln|z|+i\arg z)}$$

$$=|z|^n e^{in\arg z}=z^n.$$

(2) 当 $\alpha=-n$，n 是正整数时，$z^\alpha=\dfrac{1}{z^n}$. 可用同上方法证明.

(3) 当 $\alpha=\dfrac{1}{n}$，n 是正整数时，z^α 就是根式函数 $\sqrt[n]{z}$. 事实上，

$$z^{\alpha} \triangleq e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln} z} = e^{\frac{1}{n}(\ln|z|+i\arg z+2k\pi i)}$$

$$= e^{\frac{1}{n}\ln|z|+i\frac{\arg z+2k\pi}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}},$$

它只在 $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ 时才取不同的值，所以就是 $\sqrt[n]{z}$.

(4) 考虑 z^{α} 的每一个单值分支，其中

$$\theta_0 < \arg z < \theta_0 + 2\pi \quad (\theta_0 \text{ 为任意实数}).$$

容易看出，它就在这个区域上连续，所以根据反函数及复合函数求导数的定理（本章第二节定理 2、3）得

$$(z^{\alpha})' = (e^{\alpha \operatorname{Ln} z})' = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{z} = \alpha \cdot z^{\alpha} \cdot \frac{1}{z} = \alpha z^{\alpha-1}. \tag{13}$$

它在形式上与微积分学中幂函数的导数是一样的.

4. 三角函数

由第一章第一节中的欧拉公式(8)，有

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

将这二式相加与相减，得到

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

因此对于任意的复数 z，自然可规定

$$\cos z \triangleq \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}; \tag{14}$$

$$\sin z \triangleq \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}; \tag{15}$$

$$\operatorname{tg} z \triangleq \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}. \tag{16}$$

它们显然都是实三角函数 $\cos x$、$\sin x$、$\operatorname{tg} x$ 的推广.

这样定义的三角函数具有下列重要的性质：

(1) 对任何复数 z，有

$$\cos z + i\sin z = e^{iz}. \tag{17}$$

事实上，由上述(14)式与(15)式就可得到。

(2) $\cos z$ 是偶函数，$\sin z$ 是奇函数，即

$$\cos(-z)=\cos z,\ \sin(-z)=-\sin z. \tag{18}$$

这也可由上述(14)式与(15)式得到。

(3) 对任何复数 z，有

$$\cos^2 z+\sin^2 z=1. \tag{19}$$

事实上，从(14)式与(15)式就可得到

$$\cos^2 z+\sin^2 z=\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2$$

$$=\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}-\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{4}=1.$$

(4) $\cos z$ 与 $\sin z$ 都以 2π 为周期，$\operatorname{tg} z$ 以 π 为周期：

$$\cos(z+2\pi)=\cos z,\ \sin(z+2\pi)=\sin z,\ \operatorname{tg}(z+\pi)=\operatorname{tg} z.$$

这三式都可由(14)式～(16)式推导出来。下面证明 $\cos z$ 除了 2π 以外，再无其他周期(精确到相差 2π 的整数倍)。事实上，设 ω 为 $\cos z$ 的周期，即

$$\cos(z+\omega)=\cos z \tag{20}$$

对任何 z 都成立。特别地，在上式中令 $z=\frac{\pi}{2}$，就得到

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)=0 \quad 即 \quad e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)}+e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)}=0.$$

从而得到

$$e^{i(\pi+2\omega)}=-1.$$

这样，按上述对于对数函数的讨论，得

$$i(\pi+2\omega)=\ln|-1|+\pi i+2k\pi i \quad (k\ 是某个整数),$$

即
$$\omega=k\pi.$$

将此式代入(20)后，再令 $z=0$，则得到

$$\cos\omega=\cos k\pi=1,$$

因此 k 必须是偶数：$k=2m$，即 $\omega=2m\pi$（m 为整数）.

同法可证 $\sin z$ 以 2π 为周期，$\operatorname{tg} z$ 以 π 为周期.

(5) 对任意复数 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，有

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2; \tag{21}$$

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2. \tag{22}$$

事实上，由公式(17)，令 $z=z_1+z_2$，可得

$$\begin{aligned}\cos(z_1+z_2)+i\sin(z_1+z_2)&=e^{i(z_1+z_2)}\\&=e^{i(x_1+x_2)-(y_1+y_2)}=e^{-(y_1+y_2)}\cdot e^{i(x_1+x_2)}\\&=e^{-y_1}\cdot e^{-y_2}\cdot e^{ix_1}\cdot e^{ix_2}=e^{-y_1+ix_1}\cdot e^{-y_2+ix_2}\\&=e^{iz_1}\cdot e^{iz_2}=(\cos z_1+i\sin z_1)(\cos z_2+i\sin z_2).\end{aligned}$$

将上式右端乘开后，得到

$$\begin{aligned}&\cos(z_1+z_2)+i\sin(z_1+z_2)\\&\quad=(\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2)+i(\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2).\end{aligned}$$

将上式中的 z_1 换为 $-z_1$，z_2 换为 $-z_2$，利用性质(2)，可得到

$$\begin{aligned}&\cos(z_1+z_2)-i\sin(z_1+z_2)\\&\quad=(\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2)-i(\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2).\end{aligned}$$

将上述两个等式的两端分别相加及相减就得到(21)及(22).

由性质(5)可以推出很多与实函数相类似的三角函数的各种恒等式. 这里不多叙述了，有兴趣的读者自己可以推导.

(6) $(\sin z)'=\cos z$，$(\cos z)'=-\sin z$，$(\operatorname{tg} z)'=\dfrac{1}{\cos^2 z}$.

事实上，利用三角函数的公式(14)～(16)以及指数函数的导数性质，就得到

$$(\sin z)'=\frac{(e^{iz}-e^{-iz})'}{2i}=\frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z;$$

$$(\cos z)'=\frac{(e^{iz}+e^{-iz})'}{2}=\frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2}=-\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=-\sin z;$$

$$(\operatorname{tg} z)' = \left(\frac{\sin z}{\cos z}\right)' = \frac{(\sin z)'\cos z - \sin z(\cos z)'}{\cos^2 z}$$

$$= \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}.$$

同样还可引入其他的三角函数，如：

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}. \tag{23}$$

它们都在分母不等于零处解析，其导数值与微积分学中对应的实函数的导数值是一样的：

$$(\operatorname{ctg} z)' = -\csc^2 z, \quad (\sec z)' = \sec z \cdot \operatorname{tg} z,$$

$$(\csc z)' = -\csc z \cdot \operatorname{ctg} z. \tag{24}$$

最后，有必要指出：在复数域中，不等式

$$|\sin z| \leqslant 1 \quad 与 \quad |\cos z| \leqslant 1$$

不是到处都成立的，读者自己可以证明这一点。

5．反三角函数

首先考虑函数

$$w = \cos z \quad 及 \quad w = \sin z$$

的反函数

$$z = \operatorname{Arc}\cos w \quad 及 \quad z = \operatorname{Arc}\sin w.$$

从下面将要进行的讨论可看出：$w=\cos z$ 及 $w=\sin z$ 可以取到 w 平面上的任何一个值，因此，上述两个反函数在全平面上都有定义。习惯上，将 z 看作自变量，w 看作因变量，故可改写为：

$$w = \operatorname{Arc}\cos z, \quad w = \operatorname{Arc}\sin z.$$

前者称为反余弦三角函数，后者称为反正弦三角函数．下面将这两个反三角函数用指数函数来表示：

首先考虑 $w=\operatorname{Arc}\cos z$，因为 $z=\cos w$，因此由前面公式(14)得

$$z=\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2},$$

即 $$(e^{iw})^2-2ze^{iw}+1=0.$$

解之，得 $$e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}.$$

从而得 $$w=\operatorname{Arc}\cos z=\frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1}). \tag{25}$$

它是一个多值函数：根式函数是二值函数，对数函数是无穷多值函数. 由此也可看出，它对平面上的任何复数值 z 都是有定义的.

对于函数 $w=\operatorname{Arc}\sin z$，由 $z=\sin w$ 及前面公式 (15) 得到

$$z=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i},$$

即 $$(e^{iw})^2-2ize^{iw}-1=0.$$

解之，得 $$e^{iw}=iz+\sqrt{1-z^2}.$$

由此得 $$w=\operatorname{Arc}\sin z=\frac{1}{i}\ln(iz+\sqrt{1-z^2}). \tag{26}$$

这也是一个多值函数：根式函数是二值函数，对数函数是无穷多值函数. 在此同样也可看出，它对平面上的任何复数值 z 都是有定义的.

对于函数 $w=\operatorname{Arc}\operatorname{tg} z$，则由 $z=\operatorname{tg} w$ 及前面公式(16)得到

$$z=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1},$$

即 $$e^{2iw}=\frac{1+iz}{1-iz}.$$

由此得

$$w=\operatorname{Arc}\operatorname{tg} z=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}. \tag{27}$$

这也是一个无穷多值函数．但此函数在 $z=\pm i$ 无定义，因为它使对数函数无定义．

这三个反三角函数在相应地取了单值连续的分支后，根据反函数的导数定理(见第二节定理 3)，就得

$$(\operatorname{Arc}\cos z)'=\frac{1}{(\cos w)'}\bigg|_{w=\operatorname{Arc}\cos z}=\frac{1}{-\sin w}\bigg|_{w=\operatorname{Arc}\cos z}$$

$$=\frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 w}}\bigg|_{w=\operatorname{Arc}\cos z}=-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}};\tag{28}$$

$$(\operatorname{Arc}\sin z)'=\frac{1}{(\sin w)'}\bigg|_{w=\operatorname{Arc}\sin z}=\frac{1}{\cos w}\bigg|_{w=\operatorname{Arc}\sin z}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 w}}\bigg|_{w=\operatorname{Arc}\sin z}=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}};\tag{29}$$

$$(\operatorname{Arc}\operatorname{tg} z)'=\frac{1}{2i}[\ln(1+iz)]'-\frac{1}{2i}[\ln(1-iz)]'$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{i}{1+iz}-\frac{-i}{1-iz}\right)=\frac{1}{1+z^2}.\tag{30}$$

6．双曲函数与反双曲函数

双曲正弦函数及双曲余弦函数分别定义为

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\quad \operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}.\tag{31}$$

显然，它们都是全平面上的解析函数，且都是相应的实双曲函数的推广．具有下列几个重要性质：

(1) $$\operatorname{sh} z=-i\sin(iz),\ \operatorname{ch} z=\cos(iz).\tag{32}$$

事实上，由

$$\sin(iz)=\frac{e^{i(iz)}-e^{-i(iz)}}{2i}=\frac{e^{-z}-e^{z}}{2i}$$

及
$$\cos(iz)=\frac{e^{i(iz)}+e^{-i(iz)}}{2}=\frac{e^{-z}+e^{z}}{2}$$

就得到公式(32)．

由于公式(32)，使得双曲函数与三角函数之间存在很多密切的关系，故很多双曲函数的性质可从三角函数的性质推导出来.

(2)
$$\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1. \tag{33}$$

事实上，从等式(32)及(19)就得到

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z&=\cos^2(iz)-(-i\sin(iz))^2\\&=\cos^2(iz)+\sin^2(iz)=1.\end{aligned}$$

(3)
$$(\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z,\ (\operatorname{ch} z)'=\operatorname{sh} z. \tag{34}$$

这可由双曲正弦函数及双曲余弦函数的定义[公式(31)]通过指数函数的导数直接得到.

下面考虑它们的反函数：若对于任意的值 w，可以找到 z，满足 $w=\operatorname{sh} z$，则称 $z=\operatorname{Arcsh} w$ 为反双曲正弦函数；若对于任意的值 w，可以找到 z，满足 $w=\operatorname{ch} z$，则称 $z=\operatorname{Arcch} w$ 为反双曲余弦函数. 由于习惯上都用 z 作为自变量，w 作为因变量，因此这两个函数就分别写成 $w=\operatorname{Arcsh} z$ 及 $w=\operatorname{Arcch} z$.

从公式(32)得到

$$z=\operatorname{sh} w=-i\sin(iw),\ z=\operatorname{ch} w=\cos(iw),$$

再利用反三角正弦函数及反三角余弦函数的表示式(26)及(25)，就可以得到反双曲正弦函数与反双曲余弦函数的表示式：

$$\begin{aligned}w=\operatorname{Arcsh} z&=\frac{1}{(i)^2}\operatorname{Ln}\left[i(iz)+\sqrt{1-(iz)^2}\right]\\&=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{1+z^2})\end{aligned} \tag{35}$$

及

$$w=\operatorname{Arcch} z=\frac{1}{(i)^2}\operatorname{Ln}(z-\sqrt{z^2-1})=\operatorname{Ln}(z-\sqrt{z^2-1}). \tag{36}$$

习 题 2·4

1. 求：(1) $\operatorname{Ln}(1+i)$； (2) $\operatorname{Ln} i$.
2. 求：(1) $\sin i$； (2) $\cos i$； (3) $\sin(1+i)$；
   (4) $\cos(1+i)$； (5) $\operatorname{tg} i$； (6) $\operatorname{tg}(1+i)$.
3. 证明三角函数的性质 (2) 及性质 (4) 中的 $\sin z$ 以 2π 为周期，$\operatorname{tg} z$ 以 π 为周期.
4. 试找一个复数 z，使得 $|\sin z|\leqslant 1$ 与 $|\cos z|\leqslant 1$ 都不成立.
5. 试证：
   (1) $\sin 2z=2\sin z\cos z$；
   (2) $\operatorname{tg} 2z=\dfrac{2\operatorname{tg} z}{1-\operatorname{tg}^2 z}$.
6. 求：(1) $\operatorname{Arccos} i$； (2) $\operatorname{Arcsin} i$； (3) $\operatorname{Arctg} i$.
7. 求函数 $\sin z$、$\cos z$ 以及 $\operatorname{tg} z$ 全部等于零的复数集合.

第五节 调 和 函 数

设函数 $\quad w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$

在区域 D 内解析，根据本章第三节的定理 3：它在区域 D 内满足柯西-黎曼方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

此外，在本章第二节曾经提到，区域内的解析函数的导数仍是解析函数，因而区域内的解析函数有任意高阶的导数（这将在第三章中加以严格证明）. 由此可以推出：若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 在区域 D 内就有连续偏导数.

下面对(1)中的第一式再对 x 求偏导数，对 (1) 中的第二

式再对 y 求偏导数，就得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}.$$

利用二级偏导数的连续性，由上面二式就得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{2}$$

同样，对(1)中的第一式再对 y 求偏导数，对(1)中的第二式再对 x 求偏导数，就得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

同样利用二级偏导数的连续性，由上面二式就得到

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0. \tag{3}$$

这说明了：解析函数的实部 u 与虚部 v 都满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 g(x,\ y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g(x,\ y)}{\partial y^2}=0. \tag{4}$$

这个方程称为*拉普拉斯*(Laplace)*方程*。

在很多实际问题中，如流体力学、电学、磁学等，所出现的函数都满足拉普拉斯方程。满足这个方程的函数有一个专门的名称：

定义 1 若二元实函数 $g(x,\ y)$ 在区域 D 内有定义，且所有的二级偏导数都连续，并满足拉普拉斯方程，则称函数 $g(x,\ y)$ 为*调和函数*。

根据上面的讨论，由等式(2)及(3)可看出：一个在区域 D 内的解析函数 $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$，其实部及虚部都是这个区域内的调和函数。称 $u(x,\ y)$ 与 $v(x,\ y)$ 互为*共轭调和函数*。

反过来，对于任意两个在区域 D 内的调和函数 $u(x,\ y)$

及 $v(x, y)$，复函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 却并不一定是区域 D 内的解析函数，这是因为函数 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 不一定满足柯西-黎曼方程．然而，我们可以这样提出问题：设 D 是单连通区域，已给定一个在 D 内的调和函数 $u(x, y)$，能否设法在 D 内找到一个调和函数 $v(x, y)$，使得复函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 成为区域 D 内的一个解析函数呢？回答是肯定的，这样的调和函数 $v(x, y)$ 确实是存在的．事实上，根据本章第三节定理 2，只要找出一个函数 $v(x, y)$，使它与 $u(x, y)$ 同时满足柯西-黎曼方程即可，也即求出下列一阶偏微分方程的解即可：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}. \end{cases} \tag{5}$$

我们知道：

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy. \tag{6}$$

由于 $u(x, y)$ 是调和函数，所以函数 $-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 满足

$$-\frac{\partial\left(-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}=0.$$

而 D 又是一个单连通区域，从微积分学中知道，积分与路径无关．因而从(6)就得到偏微分方程(5)的全部解：

$$v=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C, \tag{7}$$

其中 C 是任意常数，(x_0, y_0) 是 D 内任一固定的点．

这样，函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 就是区域 D 中的解析函数了．

若区域 D 是多连通区域，则由微积分学中知道，假设 D 的边界是由 n 个连通边界 $L_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 所组成，且边界 L_1 包含所有其他的边界(见图 2-4, 其中 $n=3$)，那么公式(7)中的积分沿着任意一条只包含边界为 $L_i(2\leqslant i\leqslant n)$ 的积分值都相等，设为 C_i. 则偏微分方程的全部解就是多值函数了：

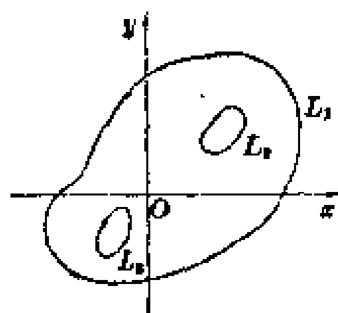


图 2-4

$$v=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy+k_2C_2+k_3C_3+\cdots+k_nC_n+C.$$

其中 $k_i(2\leqslant i\leqslant n)$ 可取任意整数，C 是任意常数. 这样，函数 $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$ 就是一个多值函数了. 有关这方面的内容，这里不再作深入讨论了，以后还会再讲到的.

【例 1】 已知 $u(x,\ y)=x^2-y^2+xy$. 求其共轭调和函数 $v(x,\ y)$ 及解析函数 $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$.

解：我们用三种方法来解这个问题，读者可进行比较.

方法(一)：显然

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y+x, \tag{8}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2.$$

它满足拉普拉斯方程. 现在解一阶偏微分方程(5)，将(8)代入(5)，就得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=2y-x,\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y}=2x+y.\end{cases} \tag{9}$$

将(9)的第一式对 x 积分(把 y 看作参变量)，就得到

$$v=2yx-\frac{x^2}{2}+g(y), \tag{10}$$

其中 $g(y)$ 是任意函数. 现在再将(10)代入 (9) 中的第二式, 就得到

$$2x+g'(y)=2x+y,$$

由此得到

$$g(y)=\frac{1}{2}y^2+C. \tag{11}$$

将(11)代入(10)后就得到 $u(x, y)$ 的共轭调和函数

$$v=2yx-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+C,$$

其中 C 为任意常数.

从而得到解析函数

$$\begin{aligned}
f(z)&=u(x, y)+iv(x, y)\\
&=(x^2-y^2+xy)+i\left(2yx-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)+iC\\
&=(x^2+2ixy-y^2)-\frac{i}{2}(x^2+2ixy-y^2)+iC\\
&=(x+iy)^2-\frac{i}{2}(x+iy)^2+iC=\frac{z^2}{2}(2-i)+iC.
\end{aligned} \tag{12}$$

方法(二): 由公式(7)及(8)得

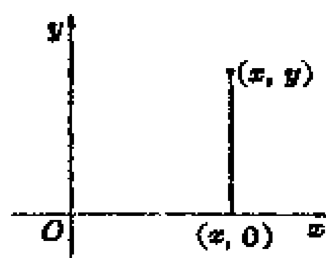


图 2-5

$$\begin{aligned}
v(x, y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C\\
&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2y-x)dx\\
&\quad+(2x+y)dy+C.
\end{aligned}$$

现在取积分路径如图 2-5, 即首先沿 x 轴从原点到点 $(x, 0)$ 然后再从点 $(x, 0)$ 沿着平行于 y 轴方向到点 (x, y). 这样, 根据线积分的定义,

则得

$$v(x, y)=\int_0^x(-x)dx+\int_0^y(2x+y)dy+C$$
$$=-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+2xy+C.$$

由此同样可以得到(12)。

方法(三)：由本章第三节定理 1 中的公式 (4) 及上面方法(一)中的公式(8)可以得到

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2x+y+i(2y-x)$$
$$=2(x+iy)-i(x+iy)=(2-i)z.$$

显然 $h(z)=\frac{z^2}{2}(2-i)$ 的导数也满足 $h'(z)=(2-i)z$.

从而得 $$(f(z)-h(z))'=0.$$

由本章习题2·3 的第 4 题知

$$f(z)-h(z)\equiv C.$$

从而得 $$f(z)=\frac{z^2}{2}(2-i)+C.$$

因为 $f(z)$ 的实部应该是函数 $u(x, y)$，所以 C 必是纯虚数，从而也得公式(12)。

习 题 2·5

1. 由下列函数 $u(x, y)$，求解析函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$：
   (1) $u(x, y)=y^3-3x^2y$, $f(i)=-1+i$;
   (2) $u(x, y)=\frac{y}{x^2+y^2}$, $f(1)=0$;
   (3) $u(x, y)=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$.
2. 证明函数 $u(x, y)=x^2-y^2$, $v(x, y)=\frac{y}{x^2+y^2}$ 都是调和函数，但函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 不是解析函数。

第二章小结

1．讲了复变函数及复变函数的极限与连续的定义，指出了它们与实函数中相应的概念有很多共同之处，但是也有差别．复连续函数有三个重要的性质：有界性、最大模及最小模的性质及一致连续性，但是没有实函数中的介值性质．此外，引进了复变函数的复合函数及反函数的概念．

2．讲了复变函数的导数及解析函数的定义，这些定义在形式上与实函数中的定义是一样的，但是由于同时涉及到两个实函数，因此实质上有很大的不同，特别是，解析函数的实部与虚部是由同时满足可微及柯西-黎曼方程的两个实函数所组成．这就提供了判别及计算解析函数的导数的一个重要方法．由此推出，一些基本初等函数（指数函数、对数函数、幂函数、三角函数、反三角函数、双曲函数及反双曲函数等）在其定义域上都是解析函数，且可以计算出它们的导数．

3．介绍了在实际问题及理论上很重要的一类函数——调和函数及共轭调和函数的概念．并给出了由调和函数计算其共轭调和函数的三种计算方法．

第二章复习讨论题

1．试定义：

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=l$, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$.

以及函数在无穷远点的连续性．

2．求证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n=e^x(\cos y+i\sin y)$, $z=x+iy$.

3．求证 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{z}-1)=\ln r+i\varphi+2\pi ik\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$.

4. 设函数 $f(z)$ 定义在 $z=z_0$ 的邻域 $S(z_0)$ 中，求证：函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续的充要条件是：对于任何的 $z_n\to z_0$，有 $f(z_n)\to f(z_0)$.

5. 证明函数 $w=e^{-\frac{1}{|z|}}$ 在 $0<|z|\leqslant R$ 上一致连续.

6. 设函数 $w=e^{-\frac{1}{z}}=e^{-\frac{1}{|z|}\cos(\operatorname{Arg} z)}\cdot e^{-\frac{1}{|z|}\sin(\operatorname{Arg} z)}$ 定义在 $z\neq 0$，求证：

(1) 它在 $0<|z|\leqslant 1$，$|\arg z|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 上一致有界；

(2) 它在上述集合上连续，但不一致连续；

(3) 它在 $0<|z|\leqslant 1$，$|\arg z|\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 上一致连续.

*7. 设 $P_n(z)$ 为一个 n 次多项式. 求证：对于复平面上的任意一个点 a，在 a 的邻域中必可以找到一个点 ξ，使得

$$|P_n(\xi)|>|P_n(a)|.$$

8. 用因变量与自变量之比的极限来定义复变函数的导数与数学分析中实函数导数的定义相比较，有没有什么差别？

9. 判断复变函数在区域内解析有几种方法？

10. 下列函数在何处可微？何处不可微？能用两种方法判断吗？

(1) $w=\operatorname{Re} z$；　　(2) $w=\bar{z}z^2$；

(3) $w=\dfrac{1}{\bar{z}}$；　　(4) $w=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$；

(5) $w=x^2+iy^2$.

11. 已知函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，求证

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=|f'(z)|^2.$$

12. 设函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在某一点 $z=z_0$ 处解析，你能给出函数 $w=f(z)$ 在 $w=w_0=f(z_0)$ 邻域中有单值反函数的充分条件吗？

13. 已知函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，试证：当函数满足下列条件之一时，$f(z)\equiv$ 常数：

(1) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析；　　(2) $|f(z)|$ 在 D 内恒为常数；

(3) $\operatorname{Re} f(z)$ 在 D 内恒为常数；　　(4) $\operatorname{Im} f(z)$ 在 D 内恒为常数.

*14. 设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析．问函数 $|f(z)|$ 与 $\ln|f(z)|$ 是否区域 D 内的解析函数？是否区域 D 内的调和函数？

15. 设 D 是关于实轴的对称区域．若函数 $w=f(z)$ 在 D 内解析，问函数 $f(\bar{z})$ 及 $\overline{f(\bar{z})}$ 在 D 内是否解析？

16. 设

$$f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}}, & z\neq 0, \\ 0, & z=0. \end{cases}$$

试证：这个函数在全平面上处处满足柯西-黎曼方程，但它在 $z=0$ 处不解析，甚至在 $z=0$ 处不连续．

17. 求下列方程的全部解：

(1) $1+e^z=0$;　　　　(2) $\cos z+\sin z=0$.

18. 求 (1) e^{3+i};　　　　(2) $\cos(1-i)$ 的值．

19. 设 $0<|z|<1$，证明 $\frac{1}{4}|z|<|e^z-1|<\frac{7}{4}|z|$．$\left[\text{提示：可应用 } e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots.\right]$

20. 求证：$|e^z-1|\leqslant e^{|z|}-1\leqslant|z|e^{|z|}$.

21. 什么叫做调和函数？它与解析函数有什么关系？

22. 设函数 $u(x, y)$ 在区域 D 内是调和函数，而函数 $z=g(\zeta)=x(\xi, \eta)+iy(\xi, \eta)$ 在区域 G 内是解析函数．设 ζ 在区域 G 内变化时，其函数值 $z=g(\zeta)$ 都位于区域 D 中．求证：$u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ 是区域 G 中的调和函数．

23. 将拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

写成极坐标形式．

24. 设函数 $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 在区域 D 内解析，且 $f'(z)\neq 0$，求证：任意两条等势线 $u(x, y)=C_1$ 及流线 $v(x, y)=C_2$ 必相互正交．

25. 求解析函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$，已知

(1) $u=2(x-1)y$, $f(2)=-i$;　　　　(2) $u-v=x^2-y^2-2xy$;

(3) $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，其中区域为全平面除去正实轴. 若就在全平面考虑，则又如何?

26. 求解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，已知

(1) $u=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$;

(2) $v=\ln(x^2+y^2)-x^2+y^2$，其中区域是全平面除去正实轴.

第三章

解析函数的积分理论

大家知道，在微积分学中，当引入实函数的积分后，可以解决很多重要的问题. 在复变函数中也一样，当引入复变函数的积分以后，也可以解决很多理论及实际问题. 例如有了积分以后，可以证明一个区域上有导数的函数就有无穷多阶导数；可以将一般的解析函数分解成一些最简单函数的迭加，这就给研究解析函数的性质提供了强有力的工具. 今后还可以看出，用复变函数的积分在计算某些类型的定积分时也会带来很大的方便.

第一节 复变函数的积分

1.1 复变函数积分的概念

我们用类似于微积分学中的方法定义复变函数的积分.

定义 1 设 C 是复平面上的一条逐段光滑曲线：$z=z(t)=x(t)+iy(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，且规定了方向，起点为 $z_0=z(\alpha)$，终点为 $z'=z(\beta)$. 又设复变函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 在曲线 C 上连续. 现在将区间 $[\alpha, \beta]$ 作任意分割：

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta,$$

这样在曲线 C 上就对应着点：

$$z_0=z(\alpha),\ z_1=z(t_1),\ \cdots,\ z_{n-1}=z(t_{n-1}),\ z_n=z'=z(\beta).$$

它们在曲线 C 上依次地由起点 $z_0=z(\alpha)$ 到终点 $z'=z(\beta)$（见图 3-1)，且把曲线 C 分成 n 段. 在曲线 C 的每一段 z_kz_{k+1} 上，

考虑乘积 $f(z_k')\Delta z_k$，其中 z_k' 是以 z_k 及 z_{k+1} 为两个端点的一小段弧上任取的一个点，$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k \ (k=0, 1, \cdots, n-1)$。作和

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k')\Delta z_k, \tag{1}$$

且令

$$d = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \widehat{z_k z_{k+1}}, \tag{2}$$

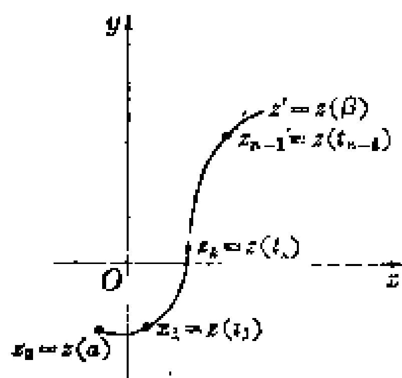


图 3-1

其中 $\widehat{z_k z_{k+1}}$ 为这一小段弧的弧长。研究极限

$$\lim_{d \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k')\Delta z_k,$$

如果不管在 C 上如何取分点 z_k，也不管在弧 $\widehat{z_k z_{k+1}}$ 上如何取 $z_k'(k=0, 1, \cdots, n-1)$，这个极限总是存在的话，则称这个极限值为复变函数 $f(z)$ 在有定向的曲线 C 上的积分，记作

$$\lim_{d \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k')\Delta z_k = \int_C f(z)dz. \tag{3}$$

【例 1】 求 $\int_C dz$，其中 C 是连接起点 z_0 及终点 z' 的任意一条逐段光滑的曲线。

解：沿着曲线 C，任取分点为 z_0、z_1、z_2、$\cdots$、$z_n = z'$，按公式(1)构成和，其中 $f(z) \equiv 1$，得到

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k')\Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta z_k = z_n - z_0 = z' - z_0.$$

因此，根据定义 1：

$$\int_C dz = \lim_{d \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k')\Delta z_k = z' - z_0.$$

这说明，这个积分不依赖于曲线 C 的形状，而只依赖于起点与终点。

【例 2】 求 $\int_C zdz$，其中 C 是例 1 中的曲线.

解：与例 1 中一样，沿着曲线 C 取分点为 z_0、z_1、…、$z_n=z'$，以及在弧 $\widehat{z_kz_{k+1}}$ 上任取点 z'_k，按(1)构成和

$$S=\sum_{k=0}^{n-1} z'_k \Delta z_k=\sum_{k=0}^{n-1} z'_k(z_{k+1}-z_k). \tag{4}$$

再构造两个和：

$$S_1=\sum_{k=0}^{n-1} z_k \Delta z_k=\sum_{k=0}^{n-1} z_k(z_{k+1}-z_k),$$

$$S_2=\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1} \Delta z_k=\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}(z_{k+1}-z_k).$$

显然

$$\begin{aligned}S_1+S_2&=\sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}+z_k)(z_{k+1}-z_k)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}^2-z_k^2)=z_n^2-z_0^2=z'^2-z_0^2.\end{aligned} \tag{5}$$

另一方面，有

$$\begin{aligned}\left|S-\frac{S_1+S_2}{2}\right|&\leqslant\frac{1}{2}\left|\sum_{k=0}^{n-1}(z'_k-z_k)(z_{k+1}-z_k)\right|\\&\quad+\frac{1}{2}\left|\sum_{k=0}^{n-1}(z'_k-z_{k+1})(z_{k+1}-z_k)\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}|z'_k-z_k|\,|z_{k+1}-z_k|\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}|z'_k-z_{k+1}|\,|z_{k+1}-z_k|\\&\leqslant\frac{1}{2}d\left(\sum_{k=0}^{n-1}|z'_k-z_k|+\sum_{k=0}^{n-1}|z'_k-z_{k+1}|\right)\\&\leqslant\frac{1}{2}d\left(\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{z_kz_{k+1}}+\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{z_kz_{k+1}}\right)\leqslant\frac{1}{2}d\cdot 2L=dL.\end{aligned}$$

其中 d 由公式(2)确定，$\widehat{z_kz_{k+1}}$ 是 C 上由 z_k 到 z_{k+1} 之间一段弧的长度，L 是曲线 C 的弧长．由此看出

$$\lim_{d\to 0}\left| S-\frac{S_1+S_2}{2}\right|=0.$$

比较(4)及(5)就得到了

$$\int_C zdz=\lim_{d\to 0} S=\frac{1}{2}(z'^2-z_0^2).$$

下面讨论积分的存在性：对于 (1) 分别写出其实部及虚部后，得到

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k')\Delta z_k=\sum_{k=0}^{n-1}[u(x_k', y_k')\Delta x_k-v(x_k', y_k')\Delta y_k]$$

$$+i[u(x_k', y_k')\Delta y_k+v(x_k', y_k')\Delta x_k], \tag{6}$$

其中 $z_k'=x_k'+iy_k'$, $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$, $\Delta y_k=y_{k+1}-y_k$, $z_k=x_k+iy_k$ $(k=0, 1, \cdots, n-1)$.

根据第二章第一节的定理 4：由函数 $f(z)$ 在 C 上的连续性，可以推出二元函数 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 在 C 上也是连续的，而 C 又是一条逐段光滑曲线，且当 $d\to 0$ 时，

$$d_1=\max_{0\leq k\leq n-1}|x_{k+1}-x_k|\to 0,$$

$$d_2=\max_{0\leq k\leq n-1}|y_{k+1}-y_k|\to 0.$$

因此，由微积分学中的线积分存在定理知道：积分 $\int_C f(z)dz$ 必存在，且由(6)得到

$$\int_C f(z)dz=\int_C [u(x, y)dx-v(x, y)dy]$$

$$+i[u(x, y)dy+v(x, y)dx]. \tag{7}$$

公式(7)提供了一种计算复变函数积分的方法：它可以**化为线积分**来进行计算. 公式(7)可以在形式上看作函数

$$f(z)=u+iv$$

与微分 $dz=dx+idy$ 相乘后所得到：

$$\int_C f(z)dz=\int_C (u+iv)(dx+idy)$$

$$=\int_C u\,dx+iu\,dy+iv\,dx+i^2v\,dy$$

$$=\int_C (udx-vdy)+i(vdx+udy).$$

所以不必专门记住它.

【例 3】 求 $\int_C \operatorname{Re} z\,dz$. 其中(1) C 为由原点 (0, 0) 到点 (2, 0) 的直线段及从点(2, 0)到点(2, 1)的直线段; (2) C 为从原点(0, 0)到点(2, 1)的直线段.

解: (1) $\int_C \operatorname{Re} z\,dz=\int_0^2 xdx+\int_0^1 2d(2+iy)$

$$=\int_0^2 xdx+i\int_0^1 2dy=2(1+i).$$

(2) $\int_C \operatorname{Re} z\,dz=\int_C xd(x+iy)=\int_C xdx+i\int_C xdy,$

由于此直线段的方程为 $y=\frac{x}{2}$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$, 因此从上式就得到

$$\int_C \operatorname{Re} z\,dz=\int_0^2 xdx+i\int_0^1 2y\,dy=2+i.$$

由此看出, 由于(1)与(2)的积分路径不同, 尽管起点与终点一样, 但是积分值还是不同.

若在公式(7)中, 利用曲线 C 的参数方程 $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, 那么就得到

$$\int_C f(z)dz=\int_\alpha^\beta \{u[\alpha(t),\ \beta(t)]\alpha'(t)-v[\alpha(t),\ \beta(t)]\beta'(t)\}dt$$
$$+i\{v[\alpha(t),\ \beta(t)]\alpha'(t)$$
$$+u[\alpha(t),\ \beta(t)]\beta'(t)\}dt. \tag{8}$$

公式(8)也可以在形式上看作 $f(z)=u+iv$ 与 $dz=z'(t)dt$ 相

乘后再积分而得到：

$$\int_C f(z)dz=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

$$=\int_\alpha^\beta \{u[\alpha(t),\ \beta(t)]+iv[\alpha(t),\ \beta(t)]\}[\alpha'(t)+i\beta'(t)]dt.$$

应用分配律，打开括弧，就可以得到公式(8)．因此也不必专门记住它．公式(8)从另外的角度提供了计算复变函数积分的一种方法，称为参数方程法．

【例 4】 计算 $\int_C \bar{z}dz$，其中 C 是：(1) 沿着从原点(0,0)到点(1, 1)的直线段；(2) 沿着从原点(0, 0)到点(1, 0)的线段 C_1，再从点(1, 0)到(1, 1)的线段 C_2 所连结成的折线段．

解：(1) 此直线段的方程为 $z=t+it$，$0\leqslant t\leqslant 1$．因此由(8)得到

$$\int_C \bar{z}dz=\int_0^1 (t-it)d(t+it)=\int_0^1 t(1-i)(1+i)dt=1.$$

(2) 直线段 C_1 的参数方程为 $z=t$，$0\leqslant t\leqslant 1$，直线段 C_2 的参数方程为 $z=1+it$，$0\leqslant t\leqslant 1$，因此

$$\int_C \bar{z}\,dz=\int_{C_1} \bar{z}\,dz+\int_{C_2} \bar{z}\,dz=\int_0^1 t\,dt+\int_0^1 (1-it)i\,dt$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+i\right)=1+i.$$

由此也看出：(1)与(2)尽管起点与终点一样，但由于这是沿着不同曲线的积分，所以积分值也是不同的．

【例 5】 计算 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}$，其中 n 为自然数，而 C 是以 z_0 为中心，半径为 r 的圆周 $|z-z_0|=r$，且规定 C 的方向是逆时针方向．

解：曲线 C 的参数方程为 $z-z_0=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{(z-z_0)^n}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{rie^{i\theta}d\theta}{r^n e^{in\theta}}$$

$$=\frac{1}{2\pi r^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{-i(n-1)\theta}d\theta=\begin{cases}1, & n=1\text{ 时};\\ 0, & n\neq1\text{ 时}.\end{cases}$$

这个积分值很重要，今后经常用到它。

1.2 复变函数积分的基本性质

复变函数的积分也有类似于微积分学中的积分性质，在此有

定理1 设 C 是复平面上的逐段光滑曲线，而函数 $f(z)$ 在 C 上连续，则

1) $\int_C af(z)dz=a\int_C f(z)dz$，其中 a 为常数；

2) $\int_C[f_1(z)+f_2(z)]dz=\int_C f_1(z)dz+\int_C f_2(z)dz$，

其中 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 也都在 C 上连续；

3) $\int_C f(z)dz=\int_{C_1}f(z)dz+\int_{C_2}f(z)dz$，

其中 C 是由曲线 C_1 及 C_2 所组成的；

4) $\int_C f(z)dz=-\int_{C^-}f(z)dz$，

其中 C^- 是与曲线 C 方向相反的同一条曲线；

5) 若在曲线 C 上，$|f(z)|\leqslant M$，M 为一常数，而 L 为曲线 C 的弧长，则

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\leqslant\int_C|f(z)|ds\leqslant ML.$$

【证】 由于复变函数积分在本质上就是线积分，在微积分学中，线积分是具有上述前四条性质的，所以在复变函数积分中，上述前四个性质也成立.

下面证明性质 5)：在曲线 C 上任取分点 $z_0, z_1, \cdots, z_n$ 以及 C 上从 z_k 到 z_{k+1} 一段弧上的任意点 z_k' $(k=0, 1\cdots, n-1)$，则

$$|S|=\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k')\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}|f(z_k')||\Delta z_k|$$

$$\leqslant M\sum_{k=0}^{n-1}|z_{k+1}-z_k| \leqslant ML.$$

在这个不等式中，两边取极限，就得到

$$\lim_{d\to 0}|S| \leqslant \int_C |f(z)|dS \leqslant ML.$$

由于
$$\lim_{d\to 0} S=\int_C f(z)dz,$$

且
$$\lim_{d\to 0}|S| = |\lim_{d\to 0} S|.$$

比较后面三个式子，就证明了性质 5)．▌

习 题 3·1

1．计算积分 $\int_C \operatorname{Im} z dz$，其中积分曲线 C 是：(1)连接点 0 与 $2+i$ 的直线段；(2) 由连接点 0 与 i 的直线段及连接点 i 与 $2+i$ 的直线段所组成.

2．计算积分 $\int_C |z| dz$，其中积分曲线 C 是：(1) 连接点 -1 与 1 的直线段；(2) 连接点 -1 与 1，中心在原点的上半个圆周.

3．计算积分 $\int_C \frac{dz}{z}$，其中积分曲线 C 是：(1) 连接 $-i$ 与 i，中心在原点的右半个圆周；(2) 连接 -1 与 1，中心在原点的下半个圆周.

4．计算积分

(1) $\int_{0 \atop \text{直线段}}^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}\,dz$;　　　　(2) $\int_{1 \atop \text{直线段}}^{i} (2+iz)^2 dz$;

(3) $\int_C (x^3+iy^2)dz$，其中 C 是虚轴上从 $-i$ 到 i 的一段.

5. 证明 $\left|\int_C dz\right| \leqslant \int_C |dz|$，并说明这两个积分的几何意义.

6. 证明 $\int_C z^2 dz = \frac{1}{3}(z'^3 - z_0^3)$，其中 C 为连接点 z_0 与 z' 的任何逐段光滑的曲线.

第二节　解析函数的柯西定理

从上一节所举的例子来看，例 2 中的被积函数 $f(z)=z$ 是全平面上处处解析的函数，它沿任何积分路线 C 的积分值都相同，即积分与路径是无关的，或说沿任何闭曲线积分为零；而例 5 中的函数 $\dfrac{1}{(z-z_0)^n}$ 在 $z=z_0$ 处不解析（它在 $z=z_0$ 处无定义），但沿以 z_0 为中心的任何一个闭圆积分为 $2\pi i$，因而不为零；例 4 中的函数 $f(z)=\bar{z}=x-iy$ 也不是解析函数，而积分也与路径有关，即沿闭曲线积分，积分值可以不为零. 因此可以设想：若被积函数 $f(z)$ 在某个区域内解析，则在此区域内沿任何闭曲线积分就可能为零；如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内不解析，则在沿某些闭曲线积分时，其积分值就有可能不等于零. 这个猜想确实是对的，这可从下列定理得到说明.

定理 1（柯西定理）　设函数 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数，则对于 D 内任何一条闭曲线 C，只要曲线 C 以及它的内部都属于区域 D，就有

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

【证】　在首先假定函数的导数 $f'(z)$ 是连续的情况下来

证明定理. 已知

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy, \tag{1}$$

其中 $f(z)=u+iv$. 由于函数 $f'(z)$ 的连续性假定, 根据第二章第三节的定理 1 知道, 函数 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 在 D 内都有连续偏导数, 且满足柯西-黎曼方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

根据格林(Green)公式*)得

$$\int_C udx-vdy=-\iint_G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx\,dy=0,$$

$$\int_C vdx-udy=\iint_G\left(-\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\,dy=0,$$

其中 G 是由 C 所围的区域. 由此从公式(1)就证明了定理.

上面"假定函数的导数 $f'(z)$ 是连续的"这一条件是很强的. 下面我们取消这个条件来证明本定理. 首先简单介绍一下这个证明的思路: 因为任意一条逐段光滑曲线可以被折线逼近, 因此如果能够证明对于任意一条闭折线, 定理成立的话, 那么就能够证明对于任意曲线, 定理也成立. 任意一条闭折线可以分成一些在三角形上的积分和, 如从图 3-2 可以看出: 折线 $ABCDEF$ 上的积分可以分割为在三角形 ABC 上积分、CEA 上积分、CDE 上积分以及 EFA 上积分之和. 因此只要证明定理对于任意一个三角形边上的积分为零即可.

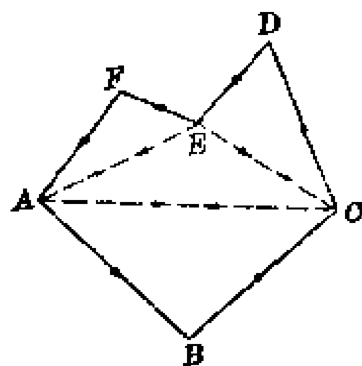


图 3-2

*) 可参阅本丛书《多元函数微积分》的第三章第五节, 或其他的微积分教程中多元积分部分有关"各种积分间的联系"的论述.

设 Δ 是任意一个三角形的边界，函数 $f(z)$ 在三角形 Δ 上以及它所围的区域上解析．首先证明

$$\int_{\Delta} f(z)dz=0. \tag{2}$$

用反证法：设

$$\int_{\Delta} f(z)dz\neq 0,$$

令

$$\left|\int_{\Delta} f(z)dz\right|=M>0. \tag{3}$$

设三角形 Δ 的周长为 l．作这个三角形每边中点的连线(见图 3-3)，这样可以得到四个全等的三角形 Δ_1、Δ_2、Δ_3、Δ_4，且

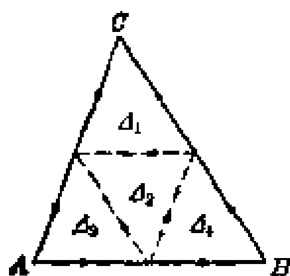


图 3-3

$$\int_{\Delta} f(z)dz=\int_{\Delta_1} f(z)dz+\int_{\Delta_2} f(z)dz+\int_{\Delta_3} f(z)dz+\int_{\Delta_4} f(z)dz,$$

其中积分路线都按逆时针方向．显然，上面等式右边至少有一个积分的绝对值 $\geqslant\frac{M}{4}$，否则，就与等式(3)矛盾．我们任取满足上述性质的四个小三角形 $\Delta_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 中的一个，记作 $\Delta^{(1)}$，其周长即为 $\frac{l}{2}$，按要求，它满足

$$\left|\int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz\right|\geqslant\frac{M}{4}. \tag{4}$$

对于三角形 $\Delta^{(1)}$，同样考虑它的每个边的中点的连线．这样又可以得到四个相等的小三角形，其周长为三角形 $\Delta^{(1)}$ 周长的一半，即为 $\frac{l}{2^2}$．由(4)按上面同样的方法可知道，这四个小三角形中至少有一个，记作 $\Delta^{(2)}$，使得函数 $f(z)$ 在其上面的

积分满足

$$\left|\int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz\right| \geqslant \frac{1}{4}\left|\int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz\right| \geqslant \frac{M}{4^2},$$

不断进行这样的分割,用数学归纳法可以证明:存在一串三角形序列 $\{\Delta^{(n)}\}$ (其中 $\Delta^{(0)}=\Delta$), 它们一个包含着一个:

$$\Delta^{(0)}=\Delta \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \cdots \supset \Delta^{(n)} \supset \cdots,$$

$\Delta^{(n)}$ 的周长为 $\frac{l}{2^n}$, 且满足

$$\left|\int_{\Delta^{(n)}} f(z)dz\right| \geqslant \frac{M}{4^n} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots). \tag{5}$$

根据第一章习题1.3第7题, 由于三角形序列 $\{\Delta^{(n)}\}$ 的直径小于周长, 即小于 $\frac{l}{2^n} \to 0$, 因此存在且只存在一个点 $z_0 \in \Delta^{(n)} (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$. 因为函数在三角形 $\Delta^{(0)}=\Delta$ 上解析, 所以在 $z=z_0$ 处也解析, 即任给 $\varepsilon>0$, 存在数 $\delta>0$, 使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时,有

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\varepsilon,$$

即

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)| \leqslant \varepsilon|z-z_0|. \tag{6}$$

若令 ε 在 $z=z_0$ 处取值为零, 那么不等式 (6) 就对任意满足 $|z-z_0|<\delta$ 的 z 都成立.

对于这个找到的数 δ, 由于三角形 $\Delta^{(n)}$ 的直径趋向于零, 且 $z_0 \in \Delta^{(n)} (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$, 因此可以找到 N, 当 $n>N$ 时, 所有的三角形 $\Delta^{(n)} \subset |z-z_0|<\delta$. 事实上, 若对某个 n, $\Delta^{(n)} \subset |z-z_0|<\delta$ 不成立, 即存在点 $z' \in \Delta^{(n)}$, 使 $|z'-z_0| \geqslant \delta$, 由于 $z_0 \in \Delta^{(n)}$, 因此 $\Delta^{(n)}$ 中两点 z' 与 z_0 之间的距离 $|z'-z_0|$ 应该小于直径,即小于 $\frac{l}{2^n}$, 也即 $\frac{l}{2^n} \geqslant \delta$, 而这对于充分大的 n

是不可能的．这样就得到了：存在自然数 N，当 $n>N$ 时，在所有的三角形 $\Delta^{(n)}$ 上不等式(6)成立．

现在我们利用不等式(6)，再对积分 $\int_{\Delta^{(n)}} f(z)\,dz$ 进行估计：根据本章第一节中的例1及例2以及复变函数积分的性质，有

$$\int_{\Delta^{(n)}} f(z_0)dz = f(z_0)\int_{\Delta^{(n)}} dz = 0;$$

$$\int_{\Delta^{(n)}} f'(z_0)(z-z_0)dz = f'(z_0)\left[\int_{\Delta^{(n)}} zdz - \int_{\Delta^{(n)}} z_0\,dz\right] = 0.$$

因而

$$\int_{\Delta^{(n)}} f(z)dz = \int_{\Delta^{(n)}} [f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)]dz.$$

由此当 $n>N$ 时，利用不等式(6)及积分的性质5)，则得到

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Delta^{(n)}} f(z)dz\right| &\leqslant \int_{\Delta^{(n)}} |f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|\,dS \\ &\leqslant \varepsilon\int_{\Delta^{(n)}} |z-z_0|\,dS \\ &\leqslant \varepsilon\cdot\frac{l}{2^n}\int_{\Delta^{(n)}} dS = \varepsilon\frac{l^2}{4^n}.\end{aligned} \tag{7}$$

比较(5)与(7)就得到

$$\frac{M}{4^n} \leqslant \varepsilon\frac{l^2}{4^n},$$

即

$$M \leqslant \varepsilon l^2.$$

由于 ε 的任意性，这就推出了 $M=0$，因此导致矛盾．这就证明了函数 $f(z)$ 在任意一个三角形边界上的积分等于零，只要这个三角形连同其内部都属于区域 D 就行．

这样，根据上面讨论过的事实，只要 P 是任意一条闭折线，且 P 及其内部都属于区域 D，就有

$$\int_{P} f(z)dz=0. \tag{8}$$

现在已有条件来证明：对于任何一条逐段光滑闭曲线 C，只要 C 及其内部都属于区域 D，就有

$$\int_{C} f(z)dz=0.$$

首先，构造一个闭集 $F\subset D$，它以曲线 C 及其内部为它的内点．事实上，显然 D 的全部边界点集合是闭集，记作 ∂D，曲线 C 当然也是闭集．由于这两个闭集不交，根据闭集上连续函数能够达到最小值的定理，这两个闭集之间的距离 $d>0$，即

$$d=\min_{z\in C,\, z'\in\partial D}|z-z'|>0.$$

现在对 C 及其内部上每一点 z^*，作以 z^* 为中心、半径为 $\frac{d}{2}$ 的圆，这些圆当然都属于 D，考虑所有这些圆的和集，显然，它是一个开集，且 C 及其内部的每一点都是它的内点，这个集合记作 $C_{\frac{d}{2}}$．考虑开集 $C_{\frac{d}{2}}$ 的全部凝聚点的集合 $\bar{C}_{\frac{d}{2}}$，它就是一个包含 $C_{\frac{d}{2}}$ 的闭集，且 $\bar{C}_{\frac{d}{2}}\subset D$．取 $F=\bar{C}_{\frac{d}{2}}$，它就是要构造的闭集 F．

由于函数 $f(z)$ 在 D 内解析，所以它必在 D 内的闭集 F 上连续．根据第二章的定理 5，函数 $f(z)$ 在闭集 F 上一致连续，即任给 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta_1>0$，使得对于任意两点 $z\in F$，$z'\in F$，只要 $|z-z'|<\delta_1$ $\left(可以认为 \delta_1<\frac{d}{2}\right)$，就有

$$|f(z)-f(z')|<\varepsilon. \tag{9}$$

现在将曲线 C 用分点 z_0，z_1，$\cdots$，z_n 分成一些小段 $\widehat{z_k z_{k+1}}$ $(k=0, 1, \cdots, n-1)$，每一段弧的长度 $\leqslant\delta_1$，这样，根据闭集

F 的构造，所有连接分点 $z_0, z_1, \cdots, z_n$ 的折线 P 都全部位于集合 F 中．于是得

$$\left|\int_C f(z)dz-\int_P f(z)dz\right|$$
$$=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\widehat{z_kz_{k+1}}} f(z)\,dz-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\overline{z_kz_{k+1}}} f(z)\,dz\right|,$$

其中 $\overline{z_kz_{k+1}}$ 表示连接点 z_k 与 z_{k+1} 的直线段．由此就可以得到

$$\left|\int_C f(z)dz-\int_P f(z)dz\right|$$
$$=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\widehat{z_kz_{k+1}}} f(z)dz-\int_{\widehat{z_kz_{k+1}}} f(z_k)dz\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{\overline{z_kz_{k+1}}} f(z_k)dz-\int_{\overline{z_kz_{k+1}}} f(z)dz\right)\right|$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\widehat{z_kz_{k+1}}} |f(z)-f(z_k)|\,dS$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\overline{z_kz_{k+1}}} |f(z_k)-f(z)|\,dS. \tag{10}$$

显然，从不等式(9)，可以得到：

当 $z\in\widehat{z_kz_{k+1}}$ 时，$|z-z_k|\leqslant\delta_1$，$|f(z)-f(z_k)|<\varepsilon$；

当 $z\in\overline{z_kz_{k+1}}$ 时，$|z-z_k|\leqslant\widehat{z_kz_{k+1}}$ 的长度 $\leqslant\delta_1$，

$$|f(z)-f(z_k)|<\varepsilon.$$

因此从(10)就得到

$$\left|\int_C f(z)dz-\int_P f(z)dz\right|$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon\,\widehat{z_kz_{k+1}}\text{ 弧长 }+\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon\,\widehat{z_kz_{k+1}}\text{ 弧长 }=2\varepsilon l.$$

再利用(8)就得到

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\leqslant 2\varepsilon l,$$

根据 ε 的任意性，最后就得

$$\int_C f(z)dz=0.$$

于是定理 1 证毕. 】

下面的定理与定理 1 是等价的.

定理 2 设 D 是复平面上的单连通区域, 函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 则积分与路径无关, 即对任何两点 $z_0\in D$, $z'\in D$, 积分

$$\int_{z_0}^{z'} f(z)dz^{*)}$$

不依赖于连接起点 z_0 与终点 z' 的任意曲线.

【证】 设 C_1 与 C_2 是连接起点 z_0 与终点 z' 的任意两条曲线. 首先认为它们除了两个端点以外不再相交(见图 3-4a). 则 C_1 与 C_2 的反方向曲线 C_2^- 构成闭曲线 C. 由于 D 是单连通区域, 因此曲线 C 及其内部都属于区域 D. 根据柯西定理及积分的性质,就得

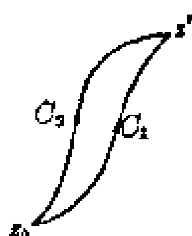


图 3-4a

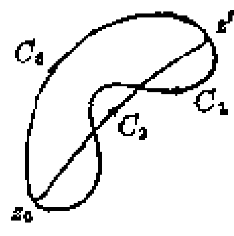


图 3-4b

$$0=\int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)\,dz+\int_{C_2^-} f(z)dz,$$

因而
$$\int_{C_1} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz.$$

若曲线 C_1 与 C_2 除了两个端点以外还在其他处相交, 那么在 D 内可以再作第三条曲线 C_3, 它与 C_1 及 C_2 除了两个端点 z_0 与 z' 以外, 都不相交(见图 3-4b)(其他情况也可以化为这种情况). 这样, 根据上面的讨论, 则得

---

*) 由于积分与路径无关, 因此可以将积分 $\int_{C_1} f(z)dz$ 记作 $\int_{z_0}^{z'} f(z)\,dz$, 其中 C_1 是任何连接 z_0 与 z' 的曲线.

$$\int_{C_3} f(z)\,dz=\int_{C_1} f(z)dz,\quad \int_{C_3} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz.$$

从而得
$$\int_{C_1} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz.$$

反过来，设积分与路径无关，则容易证明柯西定理．事实上，设 C 是任何一条闭曲线，C 及其内部都属于区域 D．在曲线 C 上，任取两点 z_0 及 z'，它们将曲线 C 分成两部分：一部分是从 z_0 到 z' 沿着逆时针方向，记作 C_1；另一部分是从 z_0 到 z' 沿着顺时针方向，记作 C_2（见图 3-5）．显然 $C=C_1+C_2^-$．根据定理的条件，积分与路径无关，从而得

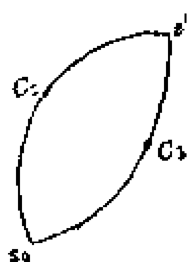


图 3-5

$$\int_{C_1} f(z)\,dz=\int_{C_2} f(z)dz,$$

即
$$\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2^-} f(z)dz=0,$$

也即
$$\int_C f(z)dz=0.$$

定理 2 证毕．▐

在很多理论及实际问题中，往往考虑 D 是单连通区域，D 的边界 C 是逐段光滑闭曲线，而函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在闭区域 $\overline{D}=D+C$ 上连续．对于这样的区域及函数，有柯西定理的如下推广：

定理 3　设 D 是由逐段光滑曲线 C 所围的内部区域，函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则
$$\int_C f(z)dz=0.$$

定理 3 与定理 1 的差别在于：在定理 1 中，被积函数 $f(z)$ 在 C 上是解析的．而在定理 3 中，只假定被积函数在 C 上及

其内部是连续的．同时，当然假定函数$f(z)$在D内是解析的．因此，这里的条件是弱得多了．我们在这里只给出证明的思路．（有兴趣的读者可以参看 И. И. 普里瓦洛夫著的《复变函数引论》中译本第167页到170页或 A. И. 马库雪维奇著的《解析函数论》中译本第351页到355页．）

这个定理的证明思路是这样的：在D内取一串闭曲线C_n，当$n\to+\infty$时，$C_n\to C$．由于C_n已属于D，因此由柯西定理，得到

$$\int_{C_n} f(z)dz=0.$$

然后再过渡到极限，利用函数$f(z)$在闭区域$\overline{D}$上的连续性以及$C_n\to C$，就可以证明

$$\int_C f(z)dz=\lim_{C_n\to C}\int_{C_n} f(z)dz=0.$$

柯西定理的另一种推广形式是D为多连通区域的情况：设区域D的边界C由一些互不相交的逐段光滑曲线$C_i(1\leqslant i\leqslant n)$所组成，其中$C_1$包含所有的其他$C_i(2\leqslant i\leqslant n)$在其内部（见图3-6），$C=C_1+C_2+\cdots+C_n$．我们规定曲线$C$的方向：当人沿着$C$走动时，区域$D$永远保持在他的左面，即在$C_1$上按逆时针方向绕行；而在其他$C_i(2\leqslant i\leqslant n)$上，按顺时针方向绕行．今后如果不作声明，总认为曲线C的方向是如此．

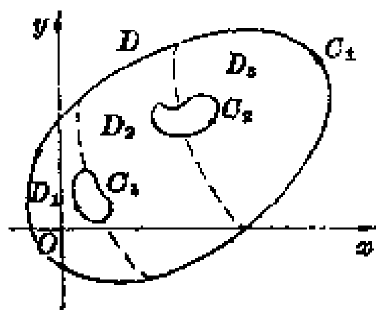


图 3-6

定理 4 设D是n连通区域，其边界$C=C_1+C_2+\cdots+C_n$，其中逐段光滑曲线C_1包含所有其他的$C_i(2\leqslant i\leqslant n)$在其内部．设函数$f(z)$在$D$内解析，在$\overline{D}=D+C$上连续，则

$$\int_C f(z)dz=0.$$

【证】 作一些辅助曲线，把区域 D 分成 n 个区域 $D_k(k=1, 2, \cdots, n)$，其中每一个区域 D_k 的边界 $L_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 也都是逐段光滑闭曲线(见图 3-6 中的虚线). 根据定理 2，当沿着区域 D_k 的边界 L_k 的正方向求积分时，得

$$\int_{L_k} f(z)dz=0 \quad (k=1, 2, \cdots, n).$$

因而有

$$\int_C f(z)dz=\int_{L_1} f(z)dz+\int_{L_2} f(z)dz+\cdots+\int_{L_n} f(z)dz=0.$$

定理 4 证毕. ▌

注 如果认为每一条曲线 $C_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的绕行都是按逆时针方向，则 $C=C_1+C_2^-+C_3^-+\cdots+C_n^-$，因此根据定理 4，得

$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2^-} f(z)dz+\int_{C_3^-} f(z)dz+\cdots+\int_{C_n^-} f(z)dz=0,$$

即

$$\int_{C_1} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz+\int_{C_3} f(z)dz+\cdots+\int_{C_n} f(z)dz. \tag{11}$$

在实际应用时，利用公式(11)来求积分 $\int_{C_1} f(z)dz$，往往是很方便的.

【例 1】 求证 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-z_0)^n}dz=\begin{cases}1, & \text{当 } n=1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n\neq 1 \text{ 时}.\end{cases}$

其中 z_0 是任何一点，C 是包含 z_0 在内的任意闭曲线，其方向

为逆时针方向，n 为整数.

【证】 我们以 z_0 为中心，半径为 r 作一个小圆 C_r，$|z-z_0|=r$，使得 C_r 全部位于 C 所包含的区域内. 显然，函数 $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ 就在以 C 及 C_r 为边界的两连通区域上解析，因此根据定理 4 的注，就得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(z-z_0)^n}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{1}{(z-z_0)^n}dz.$$

由此再利用上一节例 5 的结果就得证. 】

【例 2】 求 $\int_{x^2+y^2=2x}\cos z dz$.

解：由于函数 $\cos z$ 在全平面解析，因而它在 $x^2+y^2=2x$ 以及由它所围的区域上解析. 应用柯西定理，就得到

$$\int_{x^2+y^2=2x}\cos z dz=0.$$

【例 3】 求 $$\int_C \frac{1}{z^2-z}dz,$$

其中 C 为包含圆 $|z|\leqslant 1$ 在其内部的任何正向逐段光滑曲线.

解：由于函数 $\frac{1}{z^2-z}$ 在全平面除去 $z=0$ 及 $z=1$ 以外解析，因此曲线 C 内部就只包含它的两个不解析的点 $z=0$ 及 $z=1$. 现在设 C_1 及 C_2 是 C 内的两个正向小圆周，其中 C_1 是以 $z=0$ 为中心的小圆周 $|z|=\varepsilon$；C_2 是以 $z=1$ 为中心的小圆周 $|z-1|=\varepsilon$ (见图 3-7). 显然，曲线 C 与 C_1、C_2 互不相关，而函数 $\frac{1}{z^2-z}$ 在以 C、C_1 及 C_2 所围的区域上解析. 因

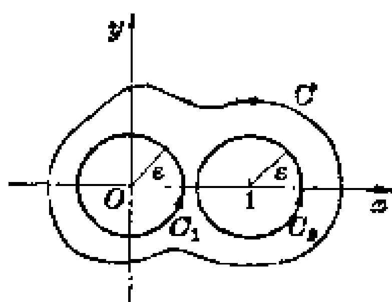


图 3-7

此，应用定理4的注，就得到

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{z^2-z}dz &= \int_{C_1}\frac{1}{z^2-z}dz+\int_{C_2}\frac{1}{z^2-z}dz\\ &=\int_{C_1}\frac{1}{z-1}dz-\int_{C_1}\frac{1}{z}dz+\int_{C_2}\frac{dz}{z-1}-\int_{C_2}\frac{1}{z}dz\\ &=0-2\pi i+2\pi i-0=0.\end{aligned}$$

其中第一个积分及第四个积分值是利用柯西定理得到的；第二个积分及第三个积分值是利用例1得到的.

从这几个例子可以看到：利用柯西定理及一些简单函数的积分，就可以对较为复杂的函数计算出其积分值. 今后我们可进一步看到，利用复变函数中的积分理论，可以更简单地计算出一些积分值.

习 题 3·2

1. 求 $\int_C \frac{\cos z}{z+i}dz$，其中 C 为圆周 $|z+3i|=1$.
2. 求 $\int_{|z-1|=1}\frac{1}{z^2-2}dz$.
3. 计算积分

   (1) $\int_C \frac{dz}{z^2+4}$；　　　　(2) $\int_C \frac{dz}{(z^2+4)^2}$.

   其中 C 为 (i) $|z-i|=2$；(ii) $|z+i|=2$；(iii) $|z|=8$.

第三节　原函数与不定积分

设 D 是单连通区域，而函数 $f(z)$ 是 D 内的解析函数，则由上一节定理2知道，对于 D 内任何一条逐段光滑曲线 AB，取积分值 $\int_{AB} f(\zeta)d\zeta$ 不依赖于曲线 AB 的位置，而只依赖于曲线 AB 的起点 z_0 及终点 z. 这样，当 z_0 固定时，这个积分就

在 D 内定义了一个终点为 z 的单值函数. 将这个单值函数记作

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)dz. \tag{1}$$

现在证明，由上述积分所确定的函数 $F(z)$ 在 D 内解析，且

$$F'(z)=f(z).$$

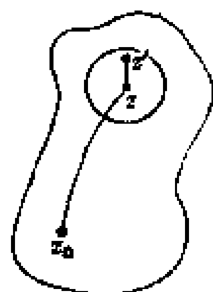


图 3-8

设 z 是区域 D 内的任一点，以 z 为中心作一个小圆 K，可以认为 $K\subset D$. 任取 K 内一点 z'(见图 3-8). 则

$$F(z')=\int_{z_0}^{z'} f(z)dz.$$

由于积分与路径是无关的，因此可以认为由 z 到 z' 是用直线段连接起来的. 考虑

$$\frac{F(z')-F(z)}{z'-z}=\frac{1}{z'-z}\int_{z}^{z'} f(\zeta)d\zeta,$$

因而由第一节例 1 可以得到:

$$\frac{F(z')-F(z)}{z'-z}-f(z)=\frac{1}{z'-z}\int_{z}^{z'} f(\zeta)d\zeta-f(z)$$

$$=\frac{1}{z'-z}\int_{z}^{z'}(f(\zeta)-f(z))d\zeta, \tag{2}$$

其中积分是沿着连接 z 到 z' 的直线段进行的. 由于函数 $f(z)$ 在 D 内解析，因此它是连续的，即任给数 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $|\zeta-z|<\delta$ 时，$\zeta\in K\subset D$，有

$$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon.$$

这样，当 $|z'-z|<\delta$ 时，由上述等式(2)就得到

$$\left|\frac{F(z')-F(z)}{z'-z}-f(z)\right|\leqslant\frac{1}{|z'-z|}\int_{z}^{z'}|f(\zeta)-f(z)|dS$$

$$\leqslant\frac{1}{|z'-z|}\cdot\varepsilon|z'-z|=\varepsilon.$$

于是 $$\lim_{z'\to z}\frac{F(z')-F(z)}{z'-z}=f(z).$$

即 $$F'(z)=f(z).$$

仔细地分析一下证明，可以发现，在整个证明中只用到两个事实：

（一）函数 $f(z)$ 在区域 D 内连续；

（二）函数 $f(z)$ 在区域 D 内沿着任意一条闭曲线上的积分值为零，即积分与路径无关．至于对区域 D，不必要求它一定是单连通区域，多连通区域也可以．

因此，可以把上面证得的结果归结为下面的定理：

定理 1 设 D 是复平面上的区域，函数 $f(z)$ 在区域 D 内连续．若函数 $f(z)$ 沿着任意一条在区域 D 内的曲线上的积分为零的话，则由变动上限的积分所定义的函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(z)dz \quad (z\in D,\ z_0\in D)$$

是一个区域 D 内的单值解析函数，且

$$F'(z)=f(z).$$

这个定理与微积分学中的结果是类似的．在微积分学中有了这个结果后，就得到了微积分的基本定理．这里也有类似的结果．与此有关的，有下述定义：

定义 1 设 D 是复平面上的区域，而函数 $f(z)$ 是区域 D 上的连续函数．满足条件

$$\Phi'(z)=f(z) \quad (z\in D)$$

的函数 $\Phi(z)$ 称为函数 $f(z)$ 的*原函数*．所有原函数的集合称为函数 $f(z)$ 的*不定积分*．

定理 2 设 D 是复平面上的区域，函数 $f(z)$ 在 D 上连续且在 D 内任何一条闭曲线上积分时，其积分值为零，则函数

$f(z)$的不定积分有下列一般表示式:

$$\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)dz+C \quad (z_0\in D). \tag{3}$$

其中 C 为任意常数; 且若 $\psi(z)$是 $f(z)$的任意一个原函数时,则有

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz=\psi(z)-\psi(z_0). \tag{4}$$

【证】 由上面定理1知: 函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ 是 D 内的单值解析函数, 且 $F'(z)=f(z)$. 此外, 由于 $\Phi(z)$ 是函数 $f(z)$的原函数,即 $\Phi'(z)=f(z)$, 因此可以得到

$$(\Phi(z)-f(z))'=0.$$

由此利用第二章第三节习题2.3第4题得到

$$\Phi(z)-F(z)=C,$$

其中 C 为常数. 这就证明了公式(3).

同理由于 $\psi(z)$是原函数,因此由(3)得到

$$\psi(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)dz+C,$$

两边令 $z=z_0$ 代入后就得到(4). 】

这个定理与微积分学中的微积分基本定理完全类似.

【例1】 求 $\int_a^b z^3dz$.

解: 由于函数 z^3 在全平面解析,因此, 根据柯西定理, 它在任何一条闭曲线上的积分为零. 所以积分值 $\int_a^b z^3dz$ 是确定的数.

显然, 函数 $\frac{z^4}{4}$ 是函数 z^3 的一个原函数, 因此利用上面定理2中的公式(4),就得

$$\int_a^b z^3 dz = \frac{1}{4}(b^4 - a^4).$$

【例 2】 求证 $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln|z| + i\arg z$，其中函数 $\frac{1}{\zeta}$ 只在区域 $-\pi<\arg\zeta<\pi$ 中有定义.

解：显然函数 $\frac{1}{\zeta}$ 是区域 $-\pi<\arg\zeta<\pi$ 中的解析函数，因此根据柯西定理，它在 $-\pi<\arg\zeta<\pi$ 上的任何一条闭曲线上的积分为零，因此 $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ 就确定了一个单值解析函数 $F(z)$，且 $F'(z)=\frac{1}{z}$.

此外，由第二章第四节中的对数函数及其导数的定义知：

$$(\ln z)_0' = (\ln|z| + i\arg z)' = \frac{1}{z},$$

即 $(\ln z)_0$ 也是 $\frac{1}{z}$ 的一个原函数. 因此应用定理 2 中的公式(4)，就得到

$$(\ln z)_0 = \int_1^z \frac{1}{\zeta}\,d\zeta + C,$$

两边令 $z=1$，利用 $(\ln 1)_0 = \ln 1 + i\arg 1 = 0$，得到 $C=0$. 由此得到

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = (\ln z)_0 = \ln|z| + i\arg z \quad (-\pi<\arg z<\pi).$$

如果所考虑的区域 D 是全平面除去 $z=0$，则函数 $\frac{1}{\zeta}$ 仍在此区域 D 中解析. 但是如果闭曲线 C 的内部包含有原点，则由上一节的例 2 知：$\int_C \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i$；如果 C 的内部不含有原点，则 $\int_C \frac{d\zeta}{\zeta} = 0$. 因此积分 $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ 就不再是一个单值解

析函数了，它依赖于连接1与 z 的积分曲线 Γ：若曲线 Γ 绕 $z=0$ 按正方向转 n 圈，则 $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}=(\ln z)_0+2n\pi i$；若曲线 Γ 绕 $z=0$ 按负方向转 m 圈，则

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}=(\ln z)_0-2m\pi i$$

（见图 3–9）. 事实上，如图 3–9 中曲线 Γ 绕 $z=0$ 一圈，则

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}=\int_{1ma}\frac{d\zeta}{\zeta}+\int_{az}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$=2\pi i+(\ln z)_0$$

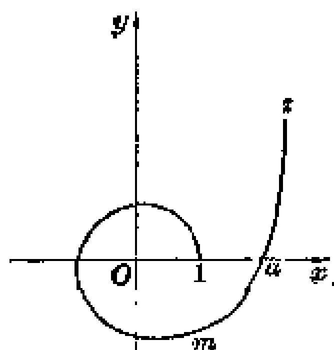


图 3-9

其他情况也可作类似考虑.

这样 $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}=(\ln z)_0+2k\pi i$,

其中 k 是连接点1及 z 的积分路线 Γ 按正方向绕原点的圈数减去按负方向绕原点的圈数. 因此由第二章第四节中对数函数及其导数可知：

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}=\ln z,$$

它是一个多值解析函数.

柯西定理还有一个逆定理，即：

定理 3［莫瑞拉(Morera)定理］ 设 D 是复平面上的单连通区域，函数 $f(z)$ 在 D 上连续. 若在 D 内任意一条闭曲线 C 上都有

$$\int_C f(z)dz=0,$$

则函数 $f(z)$ 是 D 内的解析函数.

【证】 在定理的条件下，根据本节定理1知道

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta$$

是区域 D 内的解析函数，且 $F'(z)=f(z)$. 在下一节中，将要证明，区域内解析函数的导数仍是这个区域中的解析函数，由此推出 $f(z)$ 也是 D 内的解析函数. 】

这样，由柯西定理及莫瑞拉定理，就得到一个函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析的充分必要条件：

定理 4 设 D 是复平面上的单连通区域，函数 $f(z)$ 在 D 上连续. 则函数 $f(z)$ 在 D 内解析的充要条件是：对于 D 内任意一条闭曲线 C，都有

$$\int_C f(z)dz=0.$$

习 题 3·3

1. 求 $\int_{z_0}^{z} z^n dz$.

2. 证明 $\operatorname{Arc\,tg} z=\int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}$.

第四节 解析函数的柯西公式

4.1 柯西公式

在偏微分方程中，经常会遇到解边值的问题，例如已知函数 $u(x, y)$ 在某一个区域边界上的值，且它在此区域内满足拉普拉斯方程，这样的边值问题在一定条件下就有唯一的解. 我们知道，满足拉普拉斯方程的函数是调和函数，所以这表示由调和函数在区域边界上的值就能够完全确定其在区域内部的值. 调和函数是解析函数的实部，因此自然会问：由解析函数

在区域边界上的值能否确定其在区域内的值呢？答案是肯定的．解析函数是可以由它在边界上的值表示出来，精确地说，有下面的定理：

定理1（柯西公式） 设复平面上区域D的边界C是由n条互不相交的逐段光滑曲线$C_i(1\leqslant i\leqslant n)$所组成的，其中$C_1$包含其他的$C_i(2\leqslant i\leqslant n)$在其内部，且规定$C$的方向为正方向．设函数$f(z)$在区域$D$内解析，在闭区域$\overline{D}=D+C$上连续，则在区域$D$内有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{1}$$

这个公式是解析函数理论中的一个基本公式，它表示函数$f(z)$在边界上的值完全决定了它在区域D内任一点上的值．

【证】 设z_0是区域D内的任一点，函数$\dfrac{f(z)}{z-z_0}$在区域D内除去$z=z_0$外解析．为了应用柯西定理的推广（本章第二节定理4），特在区域D内作以z_0为中心，半径为r的小圆周

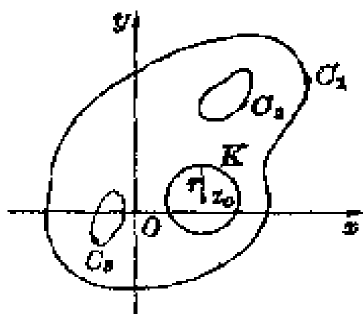


图 3-10

K：$|z-z_0|=r$．它与曲线C不相交（见图3-10）．在以C及K所围的区域上利用第二节定理4，可以得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{K^-}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=0,$$

其中K^-表示K的顺时针方向．由上式得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

这表示上面等式右端的积分与r无关，为了要证明定理，只需证明

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz=f(z_0). \tag{2}$$

事实上，由于函数$f(z)$在$z=z_0$处解析，因此它在$z=z_0$处连续，即：任给数$\varepsilon>0$，存在数$\delta>0$，使得当$|z-z_0|<\delta$时，就有

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon. \tag{3}$$

因此当$r<\delta$时，在圆周K上的点z都满足$|z-z_0|=r<\delta$，因而公式(3)也就成立了．此时，由本章第一节例5得

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz-f(z_0)\right|\\&=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz\right|\\&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_K \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}dS<\frac{1}{2\pi}\varepsilon\frac{1}{r}2\pi r=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了公式(2)．▮

推论 设函数在区域$|z-z_0|<R$内解析，在闭区域$|z-z_0|\leqslant R$上连续，则有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta \quad (0<r\leqslant R). \tag{4}$$

这个公式称为*解析函数的平均值公式*．这公式表示解析函数在任意一个圆周$|z-z_0|=r$上的积分平均值就等于它在圆心的值．

这个推论是很容易证明的．事实上，应用柯西公式就可以得到

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz \quad (0<r\leqslant R).$$

现在将圆周的参数方程$z=z_0+re^{i\theta}$代入上式，就得到

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\,rie^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta.$$

由这个公式容易得到调和函数的平均值公式，即：若二元实函数 $u(x, y)$ 在圆 $|z-z_0|<R$ 内是调和函数，则有

$$u(x_0, y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\theta,\ y_0+r\sin\theta)d\theta$$

$$(0<r<R). \qquad (5)$$

事实上，由于对于调和函数 $u(x, y)$，可以在圆 $|z-z_0|<R$ 内构造解析函数 $f(z)$，使 $u(x, y)$ 是 $f(z)$ 的实部，由此从解析函数 $f(z)$ 的平均值公式分出其实部，就立刻得到调和函数的平均值公式(5)。

【例 1】 求 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}dz$.

解：应用定理 1，取 $f(\zeta)=\sin\zeta$，$z=0$，就得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=4}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta=(\sin\zeta)\Big|_{\zeta=0}=\sin 0=0.$$

【例 2】 求 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=4}\frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}dz$.

解：解法(一)。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=4}\frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=4}\frac{1}{z+1}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=4}\frac{2}{z-3}dz.$$

对右边的第一项积分，看作 $f(\zeta)=1$，$z_0=-1$，则被积函数是 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-(-1)}$，因此按柯西公式得到 $f(\zeta)|_{\zeta=-1}=1$；对右边的第二项积分，用同样的方法可以得到积分值为 2，由此得到左边的积分值为 $1+2=3$.

解法(二)：应用第二节定理4的注，则得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=4}\frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}dz$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z+1|=\varepsilon}\frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}dz$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-3|=\varepsilon}\frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}dz.$$

其中 ε 是充分小的数. 对于第一项积分，令

$$f(\zeta)=\frac{3\zeta-1}{\zeta-3},\ z_0=-1,$$

用柯西公式得到积分值为

$$\left.\frac{3\zeta-1}{\zeta-3}\right|_{\zeta=-1}=1;$$

对第二项积分，令

$$f(\zeta)=\frac{3\zeta-1}{\zeta+1},\ z_0=3,$$

用柯西公式得到积分值为

$$\left.\frac{3\zeta-1}{\zeta+1}\right|_{\zeta=3}=2,$$

由此得到左边的积分值也是 $1+2=3$.

在很多理论及实际问题中，有时需要在包含无穷远点的区域中应用柯西公式. 为此引入下面的定理，它在应用时常常是很方便的.

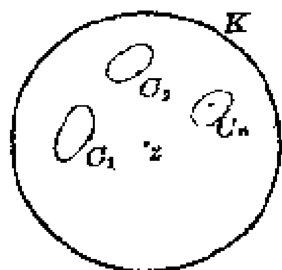


图 3-11

定理2 设 D_1 是复平面上包含无穷远点的区域，其边界为

$$C=C_1+C_2+\cdots+C_n,$$

且规定在 C 上绕行时，区域 D_1 永远保持在左方(见图3-11). 设函数 $f(z)$ 在区域 D_1 上除了无穷远点以外解析，并在闭区域 $\bar{D}_1=D_1+C$ 上连

续，且

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=f(\infty).$$

则在区域 D_1 内，函数 $f(z)$ 有下列表示式：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+f(\infty)\quad (z\in D_1). \tag{6}$$

【证】 对于任意固定的 $z\in D_1$，可以作大圆周 K：$|\zeta-z|=R$，使得在它内部包含有全部边界 C，且认为在 K 上绕行的方向是逆时针方向．函数 $f(z)$ 在以 $\Gamma=C+K$ 所围的区域 G 内解析，在 $\overline{G}$ 上连续，由此应用本节定理 1，可以得到

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \end{aligned} \tag{7}$$

从这个表示式看出，它对所有充分大的圆周都成立，即它不依赖于充分大的 R．下面证明

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=f(\infty). \tag{8}$$

事实上，根据定理的条件：任给 $\varepsilon>0$，存在数 $R_1>0$，使当 $R>R_1$ 时，有

$$|f(\zeta)-f(\infty)|<\varepsilon,\quad |\zeta-z|=R.$$

因而，根据本章第一节例 1 及上面不等式：当 $R>R_1$ 时，有

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-f(\infty)\right|\\ &=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\infty)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|\\ &\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_K \frac{|f(\zeta)-f(\infty)|}{|\zeta-z|}\,dS\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\varepsilon\cdot\frac{1}{R}\cdot 2\pi R=\varepsilon. \end{aligned}$$

这就证明了等式 (8)．由此再从 (7)，两边取极限 $R\to+\infty$ 后，就得到了公式(6)．】

【例 3】 求

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=99}\frac{dz}{(z-2)(z-4)(z-6)\cdots(z-98)(z-100)}.$$

解：由于函数

$$f(z)=\frac{1}{\prod_{k=1}^{49}(z-2k)}$$

在区域 $|z|\geqslant 99$ 上除了 $z=\infty$ 外解析，且

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=0.$$

由此应用上面定理 2 中的公式(6)，得到

$$f(100)=f(\infty)-I=-I.$$

所以

$$I=-\frac{1}{\prod_{k=1}^{49}(100-2k)}=-\frac{1}{98!!}.$$

4.2 高阶导数

利用柯西公式可以证明解析函数的一个重要性质，即：在区域内的解析函数的导数仍是解析函数．这个性质在微积分学中是没有的．

定理 3 设区域 D 的边界为 $C=C_1+C_2+\cdots+C_n$，它满足定理 1 中的规定．设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在闭区域 $\overline{D}=D+C$ 上连续．则函数 $f(z)$ 在区域 D 内有各阶导数，且在 D 内有下列表示式：

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).\qquad(9)$$

它可以看作由柯西公式(1)在积分号下求导数后得到的．

【证】 首先证明公式

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\quad(z\in D)\qquad(10)$$

成立. 为此，设 z_0 为 D 内的任一点，根据柯西公式(1)，有

$$
\begin{aligned}
f(z)-f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z_0}\right)d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}(z-z_0)\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}d\zeta.
\end{aligned}
$$

因而

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left(\frac{1}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}-\frac{1}{(\zeta-z_0)^2}\right)d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}(z-z_0)\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)^2}d\zeta. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

现在对上式最后一个积分的模作估计：由于函数 $f(\zeta)$ 在闭区域 $\overline{D}=D+C$ 上连续，因此根据第二章第一节中的定理 5，它必在闭区域 $\overline{D}$ 上有界，即存在正常数 M，使

$$
|f(\zeta)| \leqslant M. \qquad (12)
$$

设 d 是点 z_0 到区域 D 的边界 C 的距离(见图 3-12)，即

$$
d=\min_{\zeta\in C}|\zeta-z_0|>0,
$$

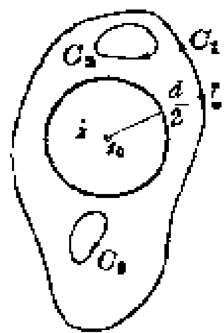


图 3-12

假定 $|z-z_0|<\frac{d}{2}$，则有

$$
\begin{aligned}
|\zeta-z| &\geqslant |\zeta-z_0|-|z_0-z| \\
&\geqslant d-\frac{d}{2}=\frac{d}{2}, \qquad (13)
\end{aligned}
$$

根据本章第一节定理 1 中的积分的性质 5) 及上面几个不等式，就得到

$$
\left|\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)^2}d\zeta\right| \leqslant \frac{M}{\frac{d}{2}\cdot d^2}\cdot l = \frac{2Ml}{d^3},
$$

其中 l 为边界 C 的长度. 由此从等式(11)得到: 当 $|z-z_0|<\frac{d}{2}$ 时,

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\,d\zeta\right|$$

$$\leqslant\frac{Ml}{\pi d^3}|z-z_0|.$$

因此当 $z\to z_0$ 时, 就得到

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\,d\zeta.$$

由于 z_0 是 D 内的任意一点, 因而就证得了(10).

下面用数学归纳法证明, 对任意的自然数 n, 公式(9)成立. 事实上, 当 $n=1$ 时, 就得(10), 所以等式(9)是成立的. 设公式(9)对 $n=k$ 成立, 即

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta\quad(z\in D)\qquad(14)$$

成立. 要证(9)对 $n=k+1$ 时也成立, 即要证

$$f^{(k+1)}(z)=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}\,d\zeta\quad(z\in D)\qquad(15)$$

成立. 为此, 对于任意的 $z_0\in D$, 由公式(14)就得到

$$f^{(k)}(z)-f^{(k)}(z_0)=\frac{k!}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left(\frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}}-\frac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\right)d\zeta$$

$$=\frac{k!}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\frac{(\zeta-z_0)^{k+1}-(\zeta-z)^{k+1}}{(\zeta-z)^{k+1}(\zeta-z_0)^{k+1}}\,d\zeta$$

$$=\frac{k!}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\frac{[(\zeta-z_0)-(\zeta-z)]\sum_{l=0}^{k}(\zeta-z_0)^{k-l}(\zeta-z)^{l}}{(\zeta-z)^{k+1}(\zeta-z_0)^{k+1}}\,d\zeta.$$

因而

$$\frac{f^{(k)}(z)-f^{(k)}(z_0)}{z-z_0}-\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+2}}d\zeta$$

$$=\frac{k!}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left[\frac{\sum\limits_{l=0}^{k}(\zeta-z_0)^{k-l}(\zeta-z)^l}{(\zeta-z)^{k+1}(\zeta-z_0)^{k+1}}-\frac{k+1}{(\zeta-z_0)^{k+2}}\right]d\zeta$$

$$=\frac{k!}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\frac{(\zeta-z_0)\sum\limits_{l=0}^{k}(\zeta-z_0)^{k-l}(\zeta-z)^l-(k+1)(\zeta-z)^{k+1}}{(\zeta-z)^{k+1}(\zeta-z_0)^{k+2}}d\zeta$$

$$=\frac{k!}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\frac{\sum\limits_{l=0}^{k}(\zeta-z)^l[(\zeta-z_0)^{k+1-l}-(\zeta-z)^{k+1-l}]}{(\zeta-z)^{k+1}(\zeta-z_0)^{k+2}}d\zeta. \tag{16}$$

由于 $z\in D$, $\zeta\in C$, 因此存在常数 M_1, 使 $|z|\leqslant M_1$, $|\zeta|\leqslant M_1$. 对于任意的 $l(0\leqslant l\leqslant k)$, 有

$$\begin{aligned}
&|(\zeta-z)^l[(\zeta-z_0)^{k+1-l}-(\zeta-z)^{k+1-l}]|\\
&\leqslant|\zeta-z|^l|z-z_0|\sum_{i=0}^{k-l}|(\zeta-z_0)^{k-l-i}(\zeta-z)^i|\\
&\leqslant(2M_1)^l|z-z_0|\sum_{i=0}^{k-l}(2M_1)^{k-l-i}(2M_1)^i\\
&\leqslant(k-l+1)(2M_1)^k|z-z_0|\leqslant(k+1)(2M_1)^k|z-z_0|,
\end{aligned} \tag{17}$$

假定 $|z-z_0|<\frac{d}{2}$, 利用(12)、(13)、(17), 由等式(16)得到

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)-f^{(k)}(z_0)}{z-z_0}-\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+2}}d\zeta\right|$$
$$\leqslant\frac{k!}{2\pi}M\frac{(k+1)^2(2M_1)^k}{\left(\frac{d}{2}\right)^{k+1}d^{k+2}}|z-z_0|.$$

由此就得到

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f^{(k)}(z)-f^{(k)}(z_0)}{z-z_0}=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+2}}d\zeta.$$

由于 z_0 是 D 内的任意一点，因而公式(15)得证. 】

注 从上述定理的证明可看出：只要函数 $f(z)$ 有下列积分表示式：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\quad(z\in D),\tag{18}$$

其中 $\varphi(\zeta)$是曲线 C 上的连续函数. 则函数 $f(z)$在区域 D 内就有任意多阶导数，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\quad(z\in D).$$

上面的积分(18)称为柯西型积分.

下面进而证明：

定理 4 设函数 $f(z)$在某点 $z=z_0$ 解析，则它在这点的邻域就有各阶导数，且各阶导数 $f^{(n)}(z)$在 $z=z_0$ 处解析.

【证】 根据定理的条件知：函数在 $z=z_0$ 的某一个邻域 $|z-z_0|<r$ 中处处有导数. 考虑圆 $|z-z_0|<\frac{1}{2}r$内所有的点 z, 显然函数 $f(z)$在闭圆 $|z-z_0|\leqslant\frac{1}{2}r$ 上解析，因而根据定理3, 它在圆 $|z-z_0|<\frac{1}{2}r$ 内有各阶导数，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\frac{1}{2}r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta.$$

这就证明了 $f^{(n)}(z)$在 $z=z_0$ 处解析. 】

注 由上述定理可推知：若函数 $f(z)$ 在 D 内解析，则 $f(z)$在 D 内有各阶导数 $f^{(n)}(z)$, 且 $f^{(n)}(z)$也在 D 内解析.

在微积分学中，我们知道：一个区间内的可微实函数 $f(x)$在此区间上不一定具有二阶导数，更谈不上有高阶导数了. 但是在一个区域内的可微复变函数 $f(z)$（即解析函数）在此区域内却具有各阶导数. 这是因为：复变函数在一点 z_0

的可微性蕴涵了在这点附近函数的改变量与自变量的改变量之比不仅当 z 依任意方向趋向于 z_0 时极限存在，且其极限值与方向无关．这个要求是很高的，但是很多实际问题所反映出来的函数确实是能够满足这个要求．

下面证明一个重要的不等式，称为柯西不等式．

定理 5 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z-z_0|<R$ 上解析，且 $|f(z)|\leqslant M$，则

$$|f^{(n)}(z_0)|\leqslant\frac{Mn!}{R^n}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).\tag{19}$$

【证】 由高阶导数公式(9)，取 $z=z_0$，对任意的 $R_1<R$，就有

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta,$$

因而有

$$|f^{(n)}(z_0)|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{R_1^{n+1}}\,2\pi R_1=\frac{Mn!}{R_1^n}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

上述不等式对任意的 $R_1>R$ 都成立，因此，在两边取极限 $R_1\to R$ 后，即得到公式(19)．】

利用柯西不等式，证明下面的重要定理：

定理 6[刘维尔(Liouville)定理] 设函数 $f(z)$ 在全平面上解析，且有界 $|f(z)|\leqslant M$，则 $f(z)\equiv$常数．

【证】 对于任意点 z_0，函数 $f(z)$ 就在任意圆 $|z-z_0|<R$ 内解析，应用导数的柯西不等式(19)，得

$$|f'(z_0)|\leqslant\frac{M}{R}.$$

令 $R\to+\infty$，就得到 $f'(z_0)=0$，由于 z_0 的任意性，得 $f'(z)\equiv0$，由第二章习题 2.3 第 4 题知 $f(z)\equiv$常数．】

习 题 3·4

1. 计算下列积分：

(1) $\int_{|z|=10}\frac{dz}{z^3+1}$; (2) $\int_{|z|=2}\frac{3z-1}{z(z-1)}dz$;

(3) $\int_{|z+1|=1}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz$; (4) $\int_{|z+i|=1}\frac{e^z}{1+z^2}dz$;

(5) $\int_{x^2+y^2=2x}\frac{1}{1+z^4}dz$; (6) $\int_{|z|=r<1}\frac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}$;

(7) $\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$; (8) $\int_{|z|=2}\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz$;

(9) $\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^3}dz$.

2. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在 $\overline{D}$ 上连续，D 的边界 C 是由有限条逐段光滑曲线所组成．若 $f(z)$ 在 C 上恒为常数 M，证明 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上也恒为常数 M.

3. 证明 $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{e^{z\zeta}}{\zeta^{n+1}}d\zeta=\frac{z^n}{n!}$,

其中 n 为自然数，C 是包含原点的曲线.

4. 设 $g(z)=\int_{|\zeta|=2}\frac{2\zeta^2-\zeta+1}{\zeta-z}d\zeta$.

(1) 用两种方法求 $g(1)$；(2) 求 $g(z_0)$，$|z_0|>2$；(3) 能否求出 $g(2)$?

5. 设函数 $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$，$z=re^{i\theta}$，在圆 $|z|<R$ 内解析；在圆 $|z|\leqslant R$ 上连续．求证：

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\phi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\phi-\theta)+r^2}d\phi\quad(0\leqslant r<R).$$

[提示：利用

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z^*}d\zeta=0\quad\left(\text{其中}\quad z^*=\frac{R^2}{\bar{z}}\right)$$

以及柯西公式.]

第五节　解析函数的最大模原理

从上一节我们知道：一个在区域内的解析函数完全可以由其边界上的值所确定. 因此可以设想：解析函数在区域内的模是否一定不超过它在边界上模的最大值？这一事实是肯定的，有下述定理证明.

定理 1（最大模原理）　设 D 是复平面上的区域，而函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析. 令

$$M=\sup_{z\in D}|f(z)|<+\infty; \tag{1}$$

若在区域 D 内存在一点 z_0，使

$$|f(z_0)|=M, \tag{2}$$

则

$$f(z)\equiv Me^{i\varphi}\quad (z\in D),$$

其中 φ 是常数.

【证】　由于 $z_0\in D$，因此必存在一个以 z_0 为中心，半径为 R 的圆 $|z-z_0|\leqslant R$，此圆全部属于区域 D. 根据解析函数的平均值公式（见上节定理 1 的推论）

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta\quad (0\leqslant r<R),$$

利用定理中的第二个条件，得到

$$M=|f(z_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta; \tag{3}$$

根据定理中的第一个条件，得到

$$|f(z_0+re^{i\theta})|\leqslant M\quad (0\leqslant r<R,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi). \tag{4}$$

现在证明

$$|f(z_0+re^{i\theta})|\equiv M\quad (0\leqslant r<R,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi). \tag{5}$$

事实上，在相反的情况下，存在 φ_0 $(0\leqslant\varphi_0<2\pi)$，使得

$$|f(z_0+re^{i\varphi_0})|<M.$$

根据函数 $f(z)$ 在 $z=z_0+re^{i\varphi_0}$ 的连续性：任给数 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $|\varphi-\varphi_0|\leqslant\delta$ 时，就有

$$|f(z_0+re^{i\varphi})-f(z_0+re^{i\varphi_0})|<\varepsilon.$$

由此得到 $$|f(z_0+re^{i\varphi})|<\varepsilon+|f(z_0+re^{i\varphi_0})|.$$

若取 $\varepsilon=\dfrac{M-|f(z_0+re^{i\varphi_0})|}{2}$，则由上式得到

$$|f(z_0+re^{i\varphi})|<\frac{M-|f(z_0+re^{i\varphi_0})|}{2}+|f(z_0+re^{i\varphi_0})|$$

$$=\frac{M+|f(z_0+re^{i\varphi_0})|}{2}<M. \qquad (6)$$

这样，由不等式(3)，利用(4)及(6)，就有

$$M\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0-\delta}|f(z_0+re^{i\varphi})|d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]-[\varphi_0-\delta,\varphi_0+\delta]}|f(z_0+re^{i\varphi})|d\varphi$$

$$\leqslant\frac{M+|f(z_0+re^{i\varphi_0})|}{2}\cdot\frac{2\delta}{2\pi}+M\frac{2\pi-2\delta}{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[2\pi M+\frac{|f(z_0+re^{i\varphi_0})|-M}{2}2\delta\right]<M.$$

这就导致了矛盾．因此等式(5)成立．从而证明在整个圆内 $|z-z_0|<R\subset D$，有

$$|f(z)|=M. \qquad (7)$$

从证明过程可以看出：对于任意一点 $z^*\in D$，若有 $|f(z^*)|=M$，只要圆 $|z-z^*|<R$ 属于区域 D，就有公式(7)成立．

下面证明：对于区域 D 内的任何点 Z，都有

$$f(Z)=M. \qquad (8)$$

事实上，因为 $z_0\in D$，$Z\in D$，所以由区域 D 的性质：在区域 D 内必存在一条折线 C_1，它连接 z_0 及 Z(见图 3-13)．设折

线 C_1 的节点为 $z_0, z_1, \cdots, z_n=Z$, d 是折线 C_1 与区域 D 的边界 ∂D 的距离:

$$d=\min_{\substack{z\in C\\ z'\in\partial D}}|z-z'|>0.$$

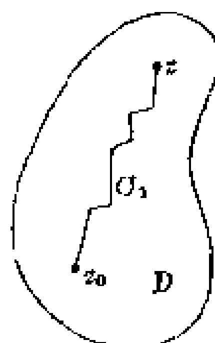


图 3 13

因而,任取一个正数 $\rho<d$, 对于折线 C_1 上任一点 z^*, 圆 $|z-z^*|<\rho$ 必在区域 D 内. 现在在折线 C_1 的每一条直线段 $\overline{z_kz_{k+1}}(0\leqslant k\leqslant n-1)$上, 取一些分点 $z_{k,i}(i=0, 1, \cdots, n_k)$, 使得相邻两个分点 $z_{k,i}$ 与 $z_{k,i+1}$ 间的距离小于或等于 $\frac{\rho}{2}$, 且把所有的节点 $z_k(0\leqslant k\leqslant n)$ 都取作分点. 显然这些分点的个数是有限个. 这样,以每一个分点作中心,半经为 ρ 的圆就包含下一个分点了.

根据上面所得到的结论, 由 $|f(z_0)|=M$ 可以推出: 当 $|z-z_0|<\rho$ 时, $|f(z)|\equiv M$, 因而有 $|f(z_{0,1})|=M$, 因为 $z_{0,1}$ 在圆 $|z-z_0|=|z-z_{0,0}|<\rho$ 之中. 由此又可推出

$$|f(z_{0,0})|=M,$$

这样不断进行下去,到某一(有限)步以后就可以证明 $|f(Z)|=M$. 这就表示对于区域 D 内任意一点 z, 有

$$|f(z)|\equiv M.$$

由此根据第二章复习讨论题 13 就可知道

$$f(z)\equiv Me^{i\varphi},$$

其中 φ 为某个常数. 定理证毕. ▌

注 1 将区域 D 的边界记作 C. 设闭区域 $\bar{D}=D+C$ 是有界区域,函数 $f(z)$在 D 内解析,在闭区域 $\bar{D}$ 上连续,则

$$\max_{z\in\bar{D}}|f(z)|=\max_{z\in C}|f(z)|, \tag{9}$$

且在 C 上至少存在一点 z^*，使得

$$|f(z^*)|=\max_{z\in\overline{D}}|f(z)|. \tag{10}$$

事实上，若函数 $f(z)\equiv$常数，则这个结论是显然的；若函数 $f(z)\neq$常数，由于它在闭区域上连续，因而根据第二章第一节定理 5，在区域 $\overline{D}$ 上必存在一点 z^*，使得 (10) 成立．点 z^* 不可能属于 D，否则，根据上述定理 1，就有 $f(z)\equiv$常数．因此 $z^*\in C$，这就证明了等式(9)及(10)．

注 2 设 D 是有界区域，把其边界记作 C．若函数 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 在 D 内解析，在闭区域 $\overline{D}=D+C$ 上连续，且在边界 C 上 $f_1(z)=f_2(z)$，则在整个闭区域 $\overline{D}$ 上，就有

$$f_1(z)\equiv f_2(z).$$

事实上，可以考虑函数 $F(z)=f_1(z)-f_2(z)$，它也在 D 内解析，在 $\overline{D}$ 上连续，且在边界 C 上 $F(z)=0$，因此根据上面的等式(9)，得到

$$\max_{z\in\overline{D}}|F(z)|=\max_{z\in C}|F(z)|=0.$$

即 $F(z)\equiv0(z\in\overline{D})$，因而当 $z\in\overline{D}$ 时，$f_1(z)\equiv f_2(z)$．

这个附注也说明了解析函数由其边界值唯一确定．

下面应用最大模原理来证明代数基本定理．

定理 2(代数基本定理) 任何一个 n 次多项式

$$P_n(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$$

在复平面上至少有一个根．

【证】 用反证法：若多项式 $P_n(z)$ 在复平面上没有根，即 $P_n(z)\neq0$，则函数 $g(z)=\dfrac{1}{P_n(z)}$ 就是全平面上的解析函数了．显然，当 $|z|=R$，且 R 充分大时，就有

$$|P_n(z)| = |z|^n\left|1+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{z^{n-1}}+\frac{a_n}{z^n}\right|$$

$$\geqslant R^n\left(1-\frac{|a_1|}{R}-\cdots-\frac{|a_{n-1}|}{R^{n-1}}-\frac{|a_n|}{R^n}\right)\geqslant\frac{1}{2}R^n.$$

由此在 $|z|=R$ 上，当 R 充分大时，有

$$|g(z)| = \left|\frac{1}{P_n(z)}\right| \leqslant \frac{1}{\frac{1}{2}R^n} = \frac{2}{R^n}.$$

利用最大模原理，就有

$$\max_{|z|\leqslant R}|g(z)| = \max_{|z|=R}|g(z)| \leqslant \frac{2}{R^n},$$

特别，在 $z=0$ 处，有

$$|a_n| = |P_n(0)| = \left|\frac{1}{g(0)}\right| \geqslant \frac{R^n}{2}.$$

而这对于充分大的 R 显然不成立. 这就说明了"$P_n(z)$ 在复平面上没有根"的结论是不成立的，从而使定理得证. ▮

推论 任何一个 n 次多项式在复平面上有且只有 n 个根(这里将几重根算作几个根).

事实上，根据上面证明的定理，n 次多项式 $P_n(z)$ 必有一个根，即存在 a，使 $P_n(a)=0$，由此从代数学知道 $P_n(z)$可以写为 $P_n(z)=(z-a)P_{n-1}(z)$，其中 $P_{n-1}(z)$ 为某个 $n-1$ 次多项式. 这样不断进行下去，用数学归纳法就可得到这个推论.

习 题 3·5

1. 试证明调和函数的最大值原理与最小值原理，即若函数 $u(x, y)$ 是区域 D 内的调和函数，令

$$\sup_{z\in D} u(x, y)=M,\quad \inf_{z\in D} u(x, y)=m,$$

若在 D 内有一点 $z_0=x_0+iy_0$，使得 $u(x_0, y_0)=M$ 或 $u(x_0, y_0)=$

m，则 $u(x, y) \equiv$ 常数.

. 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析，令

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)| \quad (0 \leqslant r<R).$$

证明 $M(r)$ 在区间 $[0, R)$ 上是一个上升函数，且若存在 r_1 及 r_2 $(0 \leqslant r_1, r_2<R)$，使得 $M(r_1)=M(r_2)$，则 $f(z) \equiv$ 常数.

第三章小结

1．引进了研究解析函数的一个重要工具——复变函数积分的概念，给出了计算复变函数的三个方法，介绍了复变函数积分的几个重要性质.

2．单连通区域及多连通区域上解析函数的柯西定理是整个解析函数理论的基础．这里同样也可以引进复连续函数的原函数及不定积分的概念，由此得到了类似于在实函数中微积分的基本定理．应用原函数的方法可以得到莫瑞拉定理，它连同柯西定理组成了解析函数的又一个等价的定义.

3．解析函数的柯西公式及其特殊情况——平均值定理说明了解析函数的值与值之间有密切的联系；即它在区域内部的值可以通过它在区域边界上的值用积分来表示．这个事实有很重要的应用，也是今后研究的出发点．这个公式的证明是基于柯西定理．用柯西公式可以证明区域上的解析函数有任意多阶导数，这是实函数导数所没有的性质．用平均值定理可以证明解析函数的最大模原理，这说明了解析函数在区域边界上的最大模可以限制区域内的最大模．这也是解析函数所特有的性质．应用最大模原理可以很容易地证明代数基本定理.

4．介绍了柯西不等式，说明了解析函数在一点的导数的

模的估计与它的解析性区域的大小密切相关，由此得到刘维尔定理.

第三章复习讨论题

1. 复变函数的积分是如何定义的？它与二元实函数的线积分有什么关系？
2. 你能举出几种方法来计算复变函数的积分？
3. 用复变函数积分的定义计算 $\int_{z_0}^{z'} z^3 dz$，这里积分路线是连接 z_0 与 z' 的任意逐段光滑曲线.
4. 求积分 $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$，其中 $\sqrt{z}=|z|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}$，$\arg z=\theta$.

   (1) C 是连接 -1 及 1 以 $z=0$ 为中心的上半个圆周；(2) C 是连接 -1 及 1 以 $z=0$ 为中心的下半个圆周.
5. 计算积分 $\int_C |z|dz$，其中 (1) C 是连接 0 及 $2-i$ 的直线段；(2) C 是 $|z|=1$ 上从 -1 到 1 的上半个圆周；(3) C 是 $|z|=1$ 上从 $-i$ 到 i 的左半个圆周；(4) C 是圆周 $|z|=1$.
6. 计算积分 $\int_C \text{Ln}\, z dz$，其中(1)当规定 $\text{Ln}\, z=\ln|z|+i\arg z$ 时，C 是 $|z|=1$；(2) 当规定 $\text{Ln}\, z=\ln|z|+i\arg z+2\pi i$ 时，C 是 $|z|=R$.
7. 证明：(1) 若函数在 $z=0$ 的邻域连续，则

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})d\theta=2\pi f(0);$$

   (2) 当函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 的邻域连续，则

$$\lim_{r\to 0}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i f(a).$$

8. 证明：若函数 $f(z)$ 在半带形 $x\geqslant x_0$，$0\leqslant y\leqslant h$ 连续，且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x+iy)=A$$

   一致对 y 成立，$0\leqslant y\leqslant h$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{B_x} f(z)dz=iAh,$$

其中 B_a 是平行于 y 轴的直线段，$0\leqslant y\leqslant h$.

9 证明：若积分路径不经过 $\pm i$，则

$$\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{4}+k\pi,$$

其中 k 是任意整数.

10. 计算积分 $\int_{|z-a|=a}\frac{z dz}{z^4-1}$，$a>1$.

11. 求 $\int_C \frac{e^z}{z^2-a^2}dz$，其中闭曲线 C 的内部包含圆 $|z|\leqslant|a|$.

12. 求 $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{ze^z}{(z-a)^3}dz$，其中 a 在闭曲线 C 的内部.

13. 求 $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$，其中 (1) 闭曲线 C 包含 $z=0$，但 $z=1$ 在 C 外部；(2) $z=1$ 在 C 内部，但 $z=0$ 在 C 外部；(3) $z=0$ 与 $z=1$ 都在 C 的内部.

14. 设 D 是复平面上的区域，曲线 C 是 D 的边界. 设函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续. 若 $z_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 D 内 n 个不同的点，令

$$w_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k).$$

求证：积分 $$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{w_n(\zeta)}\cdot\frac{w_n(\zeta)-w_n(z)}{\zeta-z}\,dz=P_{n-1}(z)$$

是一个 $n-1$ 次多项式，且满足 $P_{n-1}(z_k)=f(z_k)\quad(1\leqslant k\leqslant n)$.

15. 计算积分 $\int_C \frac{\sin z}{(z-a)^{10}}dz$，其中 (1) a 在闭曲线 C 的内部；(2) a 在闭曲线 C 的外部.

16. 不定积分是什么？它在证明柯西定理的逆定理时起什么作用？

17. 试说明柯西定理与柯西公式的关系. 试证明柯西公式.

18. 什么叫解析函数的最大模原理？其证明的关键是什么？

19. 解析函数在什么情况下有最小模原理？

20. 设函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在单连通区域 D 内解析，z_1 与 z_2 是 D 内的任意两点，求证

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)g'(z)dz=f(z)g(z)\Big|_{z_1}^{z_2}-\int_{z_1}^{z_2}f'(z)g(z)dz.$$

这里积分路线可以是连接 z_1 与 z_2 的任意曲线。

21. 证明对于任意 $\rho>0$，有

$$\int_0^{2\pi} e^{\rho\cos\varphi}\cos(\rho\sin\varphi-n\varphi)d\varphi=\frac{2\pi}{n!}\rho^n;$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\rho\cos\varphi}\sin(\rho\sin\varphi-n\varphi)d\varphi=0.$$

22. 设区域 D 的边界 C 是逐段光滑曲线。又函数

$$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$$

的实部与虚部在 $\overline{D}$ 上关于 x 与 y 有连续一阶偏导数，令

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

则 (1) $\displaystyle\frac{1}{2i}\int_C f(z)dz=\iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,dxdy;$

(2) 当 $z\in D$ 时，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\cdot\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta-z}\quad (\zeta=\xi+i\eta),$$

它是柯西公式的推广。

23. 设函数 $f(z)$ 在圆周 $|z|=R$ 上连续，作

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi})\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\theta)+r^2}\,d\psi,$$

其中 $z=re^{i\theta}$，则 $g(z)$ 是圆 $|z|<R$ 内的调和函数，且

$$\lim_{r\to R-0} g(re^{i\theta})=f(Re^{i\theta})\quad (0\leqslant\theta\leqslant2\pi).$$

[提示：利用

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\theta)+r^2}\,d\psi=1\quad (0\leqslant r<R,\ 0\leqslant\theta<2\pi).]$$

第四章

解析函数的级数展开

这一章中，首先介绍由复变量函数所构成的级数的一些基本性质，其中最重要的一类级数是幂级数及由正幂与负幂一起构成的罗朗级数，然后研究由解析函数如何展开成为幂级数及罗朗级数的问题. 这个问题无论在理论上或实际上都有重要的意义，它可以帮助我们更深入地掌握解析函数的性质，并将级数作为重要工具来解决各种重要问题.

第一节 函数项级数及其基本性质

1.1 函数项级数的收敛及一致收敛性

先考虑函数项级数. 设 E 是平面上的点集，函数序列 $\{f_n(z)\}$ 在集合 E 上都有定义. 考察如下表达式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots, \tag{1}$$

显然，对于任何一个固定的 $z\in E$，级数(1)就是第一章第三节中曾经讨论过的数字级数. 我们引入下列定义:

定义1 若对每一个 $z\in E$，级数 (1) 都收敛，则称函数项级数 (1) 在 E 上是收敛的. 级数 (1) 收敛到的值是 z 的函数，记作 $f(z)$. $f(z)$ 称为级数(1)的和，并记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z), \quad z\in E. \tag{2}$$

由此看出：若用 ε-δ 语言，那么等式(2)就表示：对于任

意的 $z\in E$ 及任给的 $\varepsilon>0$，存在数 N（它依赖于 ε 及 $z\in E$），使当 $n>N$ 时，就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z)-f(z)\right|<\varepsilon. \tag{3}$$

这样，根据第一章第三节中的柯西收敛准则（见第一章第三节定理 3），就有

定理 1 要使级数(1)在 E 上收敛于函数 $f(z)$ 的充要条件是：对于任意的 $z\in E$ 及任给的 $\varepsilon>0$，存在数 N（它依赖于 z 及 ε），使当 $n>N$ 时，对任何自然数 m，有

$$|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+m}(z)|<\varepsilon.$$

定义 2 若对任意的 $z\in E$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ 收敛，则称级数(1)在 E 上绝对收敛.

象在微积分学中一样，应用定理 1 容易证明：若级数(1)绝对收敛，则它必然收敛．反之，若级数(1)收敛，却不一定绝对收敛.

定义 3 设 $\{f_n(z)\}$ 为复变函数序列，它的各项都定义在集合 E 上，函数 $f(z)$ 也定义在点集 E 上．我们说，在点集 E 上，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 一致收敛于函数 $f(z)$，并记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f(z).$$

这是指：任给 $\varepsilon>0$，存在数 N（它依赖于数 ε，但不依赖于点 $z\in E$），使得当 $n>N$ 时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z)-f(z)\right|<\varepsilon \quad (z\in E). \tag{4}$$

关于一致收敛的级数也有柯西准则，即：

定理 2 级数(1)在 E 上一致收敛于函数 $f(z)$ 的充要条

件是：任给 $\varepsilon>0$，存在数 N（它依赖于数 ε，但不依赖于 $z\in E$），使得当 $n>N$ 时，对于任何自然数 m，有

$$|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+m}(z)|<\varepsilon \quad (z\in E) \qquad (5)$$

成立.

【证】 必要性：由于级数(1)在 E 上一致收敛于 $f(z)$，因此任给 $\varepsilon>0$，存在数 N（不依赖于 $z\in E$），使当 $n>N$ 时，就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z)-f(z)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (z\in E);$$

显然，对于任何自然数 m，更有

$$\left|\sum_{k=1}^{n+m} f_k(z)-f(z)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (z\in E).$$

从上面两式可以得到：对于任何 $z\in E$，有

$$\begin{aligned}
&|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+m}(z)|\\
&=\left|\sum_{k=1}^{n+m} f_k(z)-\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right|\\
&\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n+m} f_k(z)-f(z)\right|+\left|f(z)-\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right|\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

充分性：已知任给 $\varepsilon>0$，存在数 N（不依赖于 $z\in E$），使得当 $n>N$ 时，对于任何自然数 m，有

$$|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+m}(z)|<\varepsilon \quad (z\in E)$$

即

$$\left|\sum_{k=1}^{n+m} f_k(z)-\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right|<\varepsilon \quad (z\in E) \qquad (5')$$

成立. 根据定理1知：级数(1)必收敛，设其和为 $f(z)$，即对于任何 $z\in E$ 及任意固定的 n，有

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+m} f_k(z)=f(z).$$

由此，在(5)中取极限，就得到

$$\left|f(z)-\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right|\leqslant\varepsilon \quad (z\in E).$$

这就证明了级数(1)一致收敛于函数 $f(z)$. ▌

定义 4 设函数 $f_n(z)(n=1, 2, \cdots)$ 定义在区域 D 上，若级数(1)在区域 D 内的任何一个闭集 F 上都一致收敛于函数 $f(z)$，则称级数(1)内闭一致收敛于函数 $f(z)$.

今后将经常要用到内闭一致收敛的概念.

象在微积分学中一样，有下面一个充分性的方法来判断级数(1)的一致收敛性：

定理 3 设函数 $f_n(z)(n=1, 2, \cdots)$ 定义在点集 E 上，且对充分大的 n，存在数列 M_n，使

$$|f_n(z)|\leqslant M_n \quad (z\in E). \tag{6}$$

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛，则级数(1)在 E 上绝对且一致收敛.

【证】 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛，根据第一章第三节中级数收敛的柯西准则，任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使当 $n>N$ 时，对任何自然数 m，有

$$|M_{n+1}+M_{n+2}+\cdots+M_{n+m}|<\varepsilon.$$

由此，从不等式(6)得到：对任何的 $z\in E$，就有

$$\begin{aligned}&|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+m}(z)|\\&\quad\leqslant|f_{n+1}(z)|+|f_{n+2}(z)|+\cdots+|f_{n+m}(z)|\\&\quad\leqslant M_{n+1}+M_{n+2}+\cdots+M_{n+m}<\varepsilon.\end{aligned}$$

应用定理 1 及定理 2 就证明了级数(1)是绝对且一致收敛的. ▌

【例 1】 讨论级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在$|z|<1$ 上的一致收敛性.

解：当$|z|\leqslant r<1$ 时，$|z^n|\leqslant r^n(n=1,2,\cdots)$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 收敛，其中 $r<1$，根据定理3，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在任何一个闭圆$|z|\leqslant r<1$ 上一致且绝对收敛，即在$|z|<1$ 上内闭一致收敛.

现在证明 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在$|z|<1$ 上不一致收敛. 用反证法：假定它是一致收敛的，应用定理 2，任给 $\varepsilon>0$，存在N，不依赖于z，使得当 $n>N$ 时，对任意的自然数 m，就有

$$|z^{n+1}+z^{n+2}+\cdots+z^{n+m}|<\varepsilon, \quad |z|<1.$$

特别在 $m=1$ 时，有

$$|z|^{n+1}<\varepsilon, \quad |z|<1.$$

由此，取 $z=z_n=1-\frac{1}{n+1}$，显然$|z_n|<1$. 因而由上式得到

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<\varepsilon. \tag{7}$$

但上式对充分大的 n 不可能成立，因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{e},$$

所以若取 $\varepsilon=0.1$，当 n 充分大时，不等式(7)不满足，这就出现了矛盾. 所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在$|z|<1$ 上不一致收敛.

用类似于微积分学中的方法，可以证明关于级数和函数的连续性及逐项积分的两个性质:

定理 4 1) 设平面点集合 E 上的每一点都是凝聚点，函数$f_n(z)(n=1, 2, \cdots)$在 E 上连续，级数(1)在 E 上一致收敛于函数 $f(z)$，则 $f(z)$在 E 上连续；2) 设函数 $f_n(z)(n=1, 2, \cdots)$都在曲线 C 上连续，级数(1)在曲线 C 上一致收敛，则

$$\int_C f(z)dz = \int_C \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_C f_n(z)dz. \tag{8}$$

【证】 先证 1)：设 z_0 是 E 上任意一点. 由于级数(1)在 E 上一致收敛，因此任给 $\varepsilon>0$，存在数 N，它不依赖于 $z\in E$，使当 $n>N$ 时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z)-f(z)\right|<\frac{\varepsilon}{3} \quad (z\in E). \tag{9}$$

特别地，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z_0)-f(z_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{10}$$

这样，对于任意固定的 $n(n>N)$，利用三角不等式，便得到

$$\begin{aligned}|f(z)-f(z_0)| \leqslant & \left|f(z)-\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right| \\ & +\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z)-\sum_{k=1}^{n} f_k(z_0)\right| \\ & +\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z_0)-f(z_0)\right|.\end{aligned} \tag{11}$$

由于每一个函数 $f_k(z)(k=1, 2, \cdots)$ 在 E 上 z_0 处连续，因而对于固定的 n，函数 $\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ 在 E 上 z_0 处也是连续的. 即对任意的 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $|z-z_0|<\delta\ (z\in E)$ 时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z)-\sum_{k=1}^{n} f_k(z_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{12}$$

因而由不等式(11)，利用(9)、(10)及(12)得到

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon.$$

因为 z_0 是 E 上的任意一点，因此 $f(z)$ 在 E 上连续.

证明 2)：根据题设条件，由 1)知 $f(z)$ 在 C 上连续. 设曲线 C 的长度为 l，根据级数(1)在 C 上一致收敛性的条件，任给 $\varepsilon>0$，存在数 N，使当 $n>N$ 时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z)-f(z)\right|<\frac{\varepsilon}{l} \quad (z\in C). \tag{13}$$

由此得到

$$\begin{aligned}&\left|\int_C f(z)dz-\sum_{k=1}^{n}\int_C f_k(z)dz\right|\\&=\left|\int_C\left(f(z)-\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right)dz\right|\\&\leqslant\int_C\left|f(z)-\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right|ds<\frac{\varepsilon}{l}\,l=\varepsilon.\end{aligned}$$

定理得证．∎

大家知道，在微积分学中有一个逐项求导数的定理，在复变函数中，也有下面相应的重要定理：

定理 5［魏尔斯特拉斯（Weierstrass）第一定理］　设函数序列$\{f_n(z)\}$中的每一项在区域 D 内解析，且在 D 内由它们所构成的级数在 D 内闭一致收敛于函数$f(z)$，即

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)=f(z). \tag{2}$$

则有

1）函数$f(z)$在 D 内解析；

2）函数$f(z)$在 D 内的各阶导数可以由(2)式左端逐项求导数得到．即

$$f^{(p)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(p)}(z) \quad (p=1,\ 2,\ \cdots); \tag{14}$$

3）级数(14)也在 D 内闭一致收敛．

【证】　证明 1)：首先易证函数$f(z)$在 D 内连续．事实上，对于任意点 $z_0\in D$，存在圆$|z-z_0|\leqslant R\subset D$．根据定理的题设条件，级数(1)在此圆上一致收敛，且每一项$f_k(z)$($k=1$, 2, $\cdots$)都是解析函数，当然也在此圆上连续．根据定理 3，一致收敛级数(2)的和函数$f(z)$在$|z-z_0|\leqslant R$ 上连续，因此在

z_0 处连续. 因为 z_0 是 $\bar{D}$ 内的任意一点, 所以函数 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 内连续.

现在设 ζ 在圆周 C_R: $|\zeta-z_0|=R$ 上, 仍设圆周 C_R 及其内部都属于 D. 设 $|z-z_0|\leqslant\frac{R}{2}$. 容易证明, 级数

$$\frac{f_1(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{f_2(\zeta)}{\zeta-z}+\cdots+\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}+\cdots=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} \qquad (15)$$

对固定的 z, $|z-z_0|\leqslant\frac{R}{2}$, 关于 $\zeta\in C_R$ 是一致收敛的. 事实上, 由

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right|=\frac{1}{|\zeta-z|}\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(\zeta)-f(\zeta)\right|$$
$$\leqslant\frac{2}{R}\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(\zeta)-f(\zeta)\right|,$$

利用级数(2)的一致收敛性即得. 这样一来, 应用定理 4 的 2) 就可以在 C_R 上逐项积分, 即

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{C_R}\frac{f_k(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(z)=f(z), \qquad (16)$$

其中第二个等式是利用函数 $f_k(z)$ 的解析性及柯西公式得到的, 说明函数 $f(z)$ 有形如(16)的积分表示式. 因此, 根据第三章第四节定理 3 的注知道: 函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析. 因为 z_0 是 D 内的任意一点, 所以函数 $f(z)$ 在 D 内解析.

证明 2): 类似于上面的论证, 对于任意一点 $z_0\in D$, 设 C_R: $|\zeta-z_0|=R$ 及其内部属于 D, 而 $|z-z_0|\leqslant\frac{R}{2}$, 可以证明, 级数

$$\frac{f_1(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}+\frac{f_2(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}+\cdots+\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}+\cdots$$

$$=\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}} \tag{17}$$

关于$\zeta\in C_R$是一致收敛的，其中p是任意自然数．事实上，这可由

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}-\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}\right|$$

$$=\frac{1}{|\zeta-z|^{p+1}}\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(\zeta)-f(\zeta)\right|$$

$$\leqslant\frac{2^{p+1}}{R^{p+1}}\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(\zeta)-f(\zeta)\right| \tag{18}$$

及级数(2)在C_R上一致收敛性看出．同样，根据定理4中的2)，等式(17)可以在C_R上逐项积分：

$$\frac{p!}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}d\zeta=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p!}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f_k(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}d\zeta,$$

即

$$f^{(p)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k^{(p)}(z)\quad(p=1,\ 2,\ \cdots). \tag{14}$$

这里用到了第三章中的高阶导数定理（参见第三章第四节定理3）．

最后，证明3)：设F是D内的任意有界闭集，F与D的边界∂D的距离为d：

$$d=\min_{z\in F,z'\in\partial D}|z-z'|>0,$$

设$R<d$，则对任意一点z_0，圆周C_R：$|\zeta-z_0|=R$及其内部都属于区域D，因此，当$\zeta\in C_R$，$|z-z_0|\leqslant\frac{R}{2}$时，不等式(18)成立．所以当$|z-z_0|<\frac{R}{2}$时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k^{(p)}(z) - f^{(p)}(z)\right|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{p!}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta - \frac{p!}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta\right|$$

$$\leqslant \frac{p!}{2\pi}\left(\frac{2}{R}\right)^{p+1} l \cdot \max_{\zeta \in C_R} \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(\zeta) - f(\zeta)\right|.$$

利用级数(2)在 C_R上一致收敛于函数 $f(z)$，由上式就推出 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(p)}(z)$在圆 $|z-z_0|<\frac{R}{2}$ 上一致收敛于函数 $f^{(p)}(z)$. 考虑所有圆$|z-z_0|<\frac{R}{2}(z_0 \in F)$的集合，这些圆显然覆盖了整个闭集 F. 由此根据第一章中的覆盖定理(见第一章定理6)，在这些圆中，必存在有限个圆 $K_{z_1}, K_{z_2}, \cdots, K_{z_s}$ 这些圆全体覆盖整个闭集 F. 对于每一个圆 $K_{z_i}(1 \leqslant i \leqslant s)$，任给 $\varepsilon>0$，存在数 N_i，使当 $n>N_i$ 时，在 K_{z_i} 上有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k^{(p)}(z) - f^{(p)}(z)\right| < \varepsilon \quad (p\text{ 是自然数}). \tag{19}$$

由此推出：当 $n>\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s}(N_i)$时，在整个闭集 F 上(19)成立. 即等式(14)在 F 上一致地成立. 】

利用最大模原理(第三章第五节定理1)可以证明下面的定理.

定理6(魏尔斯特拉斯第二定理) 设 D 是平面上的区域，∂D 是它的边界；函数 $f_n(z)(n=1, 2, \cdots)$在 D 内解析，在 $\overline{D}=D+\partial D$ 上连续，且级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$在区域 D 的边界 ∂D 上一致收敛，则它必在闭区域 $\overline{D}=D+\partial D$ 上也一致收敛.

【证】 根据定理2，由本定理的题设条件得：任给 $\varepsilon>0$，存在数 N，使当 $n>N$ 时，有

$$\max_{z\in\partial D}|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+m}(z)|<\varepsilon,$$

其中 m 是任意自然数．由于函数 $f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+m}(z)$ 在 D 内解析，在 $\bar{D}$ 上连续，因此根据最大模原理（见第三章第五节定理 1 的注 1）有

$$\max_{z\in\bar{D}}|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+m}(z)|$$
$$=\max_{z\in\partial D}|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+m}(z)|<\varepsilon.$$

再根据本节定理 2 就证明了本定理．】

1.2 幂级数

在函数项级数中，幂级数是最简单的形状．所谓幂级数，就是在函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 中，$f_n(z)=a_nz^n$ 或 $f_n(z)=a_n(z-z_0)^n$，其中 a_n 为常数，z_0 是任意点．换句话说：具有形状为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n \tag{20}$$

或

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{21}$$

的级数都称为幂级数．在解析函数理论中，幂级数是在研究各种理论问题及实际问题中的一个不可缺少的工具．

首先介绍类似于微积分学中的一个定理：

定理 7［阿贝尔(Abel)第一定理］ 设幂级数(21)在一点 $z_1\neq z_0$ 处收敛，则级数(21)必在圆 $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ 中内闭一致且绝对收敛．

【证】 由于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ 收敛，因此根据第一章中收敛的必要条件（第一章第三节定理7）知：

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_1-z_0)^n=0,$$

因此可以找到数 M，使得对所有的自然数 n，有

$$|a_n(z_1-z_0)^n|\leqslant M.$$

设 $$|z-z_0|\leqslant\rho<|z_1-z_0|,$$

则因为

$$\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|\leqslant\frac{\rho}{|z_1-z_0|}<1,$$

因而

$$|a_n(z-z_0)^n|=|a_n(z_1-z_0)|\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n\leqslant M\cdot q^n,$$

其中 $q=\dfrac{\rho}{|z_1-z_0|}<1$. 利用级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$ 收敛，由定理 3 就得到级数(21)在圆 $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ 内闭一致收敛及在 $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ 绝对收敛. 】

推论 若级数(21)在 $z_2\neq z_0$ 处不收敛(即发散)，则在区域 $|z-z_0|>|z_2-z_0|$ 上处处不收敛.

【证】 事实上，假若在某一点 z_1 收敛，且 $|z_1-z_0|>|z_2-z_0|$，根据上面的定理 7，级数(21)应该在 $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ 内闭一致收敛，特别应该在 z_2 收敛，其中 $|z_2-z_0|<|z_1-z_0|$，但这与题设矛盾. 】

这样一来，全部幂级数(21)可以分成三大类：

第一类的幂级数(21)除了 $z=z_0$ 以外处处发散，如

$$1+(z-z_0)+2^2(z-z_0)^2+\cdots+n^n(z-z_0)^n+\cdots. \tag{22}$$

显然，它在 $z=z_0$ 处收敛；当 $z\neq z_0$ 时，

$$\lim_{n\to+\infty}n^n(z-z_0)^n=\lim_{n\to+\infty}[n(z-z_0)]^n=\infty.$$

因此不满足级数收敛的必要条件，所以发散.

第二类的幂级数(21)在全平面上处处收敛，如

$$1+(z-z_0)+\frac{(z-z_0)^2}{2^2}+\cdots+\frac{(z-z_0)^n}{n^n}+\cdots. \tag{23}$$

显然，对任意复数 z，当 n 充分大时，有 $\left|\frac{z-z_0}{n}\right|<\frac{1}{2}$，因此

$$\left|\frac{(z-z_0)^n}{n^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}.$$

根据定理 3，级数(23)处处收敛.

第三类的幂级数(21)是存在一个点 $z_1\neq z_0$，使(21)收敛；又存在一个点 z_2，使级数(21)发散. 从定理 7 的推论可看出：$|z_1-z_0|\leqslant|z_2-z_0|$，现在考虑所有使级数(21)收敛的点 z^* 所对应的量 $|z^*-z_0|$ 的集合 E：

$$E=\{|z^*-z_0|\,|\,\text{级数(21)在 } z=z^* \text{ 处收敛}\},$$

因为级数(21)在 z_1 收敛，因此 E 中包含量 $|z_1-z_0|$；又因为根据定理 7 的推论，$|z^*-z_0|\leqslant|z_2-z_0|$，因此集合 E 有上界 $|z_2-z_0|$. 由此看出，集合 E 必有上确界，记作 R，显然，

$$0<|z_1-z_0|\leqslant R\leqslant|z_2-z_0|<+\infty.$$

可以证明，级数(21)在圆 $|z-z_0|<R$ 内收敛；在 $|z-z_0|>R$ 发散. 事实上，对于任何 z'，满足 $|z'-z_0|<R$，根据上确界的定义，存在点 z^*，使 $|z'-z_0|<|z^*-z_0|<R$，级数(21)在 $z=z^*$ 收敛，因而根据阿贝尔第一定理，级数(21)在 $z=z'$ 收敛. 若取任何 z''：$|z''-z_0|>R$，再根据上确界的定义，级数(21)在 $z=z''$ 上必发散，否则，E 中包含量 $|z''-z_0|$，因而上确界就大于 R 了.

定义 5 若存在一个数 R，使得幂级数(21)在 $|z-z_0|<R$ 中处处收敛；而在 $|z-z_0|>R$ 中处处发散，则称 R 为幂级数(21)的收敛半径，$|z-z_0|<R$ 为收敛圆.

对于第一类幂级数，我们认为它的收敛半径为零；对于第二类幂级数，我们认为它的收敛半径为 $+\infty$，从而有下列定理：

定理 8 所有的幂级数(21)可以分为三大类：

1) 对于任何一点 $z\neq z_0$, 幂级数都不收敛，此时收敛半径 $R=0$;

2) 对于任何一点 z, 幂级数都收敛，此时收敛半径 $R=+\infty$;

3) 存在使幂级数收敛的点，也存在使幂级数不收敛的点，此时收敛半径 R 存在，且 $0<R<+\infty$.

幂级数(21)在收敛圆 $|z-z_0|<R$ 的边界上的性质是很复杂的，这里不准备再作详细的讨论了.

根据定理 8, 幂级数的收敛半径 R 是可以唯一地确定的，因此它是否可以通过其系数 a_n 就能够求出来呢？答案是肯定的. 为此，下面先复习一下微积分学中讲到的有关上极限的概念.

定义 6 设 $\{c_n\}$ 是一个实数序列，考虑这个序列的所有凝聚点的集合 s:

$$s=\{b\mid \lim_{n_i\to+\infty} c_{n_i}=b, \text{ 包括 } b=\pm\infty \text{ 情况}\}.$$

令
$$l_1=\sup s,\quad l_2=\inf s,$$
称 l_1 是序列 $\{c_n\}$ 的上极限；l_2 是序列 $\{c_n\}$ 的下极限. 记作

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} c_n=l_1,\quad \underline{\lim_{n\to+\infty}} c_n=l_2.$$

从定义看出，若序列 $\{c_n\}$ 没有上界，则 $l_1=+\infty$; 若序列 $\{c_n\}$ 没有下界，则 $l_2=-\infty$.

定理 9 1) 若 $\{c_n\}$ 有上界，则要使 $l_1=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} c_n$ 的充要条件是：

(一) 任给 $\varepsilon>0$, 存在数 N, 使当 $n>N$ 时，$c_n\leqslant l_1+\varepsilon$;

(二) 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\{c_n\}$ 中一个子序列 $\{c_{n_i}\}$, 使 $c_{n_i}\geqslant l_1-\varepsilon$.

2) 若$\{c_n\}$有下界，则要使$l_2=\underline{\lim}_{n\to+\infty} c_n$的充要条件是：

（一）任给$\varepsilon>0$，存在数N，使当$n>N$时，$c_n\geqslant l_2-\varepsilon$；

（二）任给$\varepsilon>0$，存在$\{c_n\}$中一个子序列$\{c_{m_i}\}$，使$c_{m_i}\leqslant l_2+\varepsilon$.

【证】 因为考虑到在本定理中，通过$\{-c_r\}$可以将2)转化为1)，所以在此只证明1).

必要性：因为$l_1=\sup s$，所以对于任意的$\varepsilon>0$，在$x\geqslant l_1+\varepsilon$上不可能再有$\{c_n\}$中无限多个点，否则，根据列紧性定理（见第一章中的定理5)，在$\{c_n\}$中存在收敛的子序列，设其极限为b，显然有$b\geqslant l_1+\varepsilon$. 由此推出$b\in s$. 这与上确界的定义相矛盾. （一）证毕.

由于$l_1=\sup s$，所以任给$\varepsilon>0$，在s上存在b，使$b>l_1-\varepsilon$. 由于$b\in s$，所以存在$\{c_{n_i}\}$，使$\lim_{n_i\to+\infty} c_{n_i}=b$，从而当$n_i$充分大时，就有$c_{n_i}\geqslant l_1-\varepsilon$. （二）也证毕.

充分性：由（一）可知，对于任意的$\varepsilon>0$，在$x\geqslant l_1+\varepsilon$上，没有无限多个$\{c_n\}$中的点，因此也就没有凝聚点. 所以$\sup s\leqslant l_1+\varepsilon$. 由$\varepsilon$的任意性，就得到$\sup s\leqslant l_1$. 由（二），根据第一章中的列紧性定理可知，在$x\geqslant l_1-\varepsilon$中必有$\{c_n\}$的凝聚点. 因此$\sup s\geqslant l_1-\varepsilon$，同样，由$\varepsilon$的任意性得到$\sup s\geqslant l_1$. 归纳上述两方面，就得$\sup s=l_1$. 定理证毕. 】

定理10［柯西-阿达玛(Cauchy-Hadamard)定理］ 对于幂级数(21)，设

$$l_1=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|},\tag{24}$$

其中$\{a_n\}$为(21)中的系数，则

$$R=\frac{1}{l_1}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}},\tag{25}$$

【证】 1) 设 $l_1=0$, 我们证明级数(21)处处收敛. 由定理9知道, 对于任意数 $\varepsilon>0$, 存在数 $N>0$, 使当 $n>N$ 时, 有

$$\sqrt[n]{|a_n|}<\varepsilon \quad 即 \quad |a_n|<\varepsilon^n. \tag{26}$$

对于任意的点 $z_1\neq z_0$, 取 $\varepsilon=\frac{1}{2|z_1-z_0|}$, 则从(26)知道, 当 $n>N$ 时,

$$|a_n(z_1-z_0)^n|\leqslant \varepsilon^n|z_1-z_0|^n=\frac{1}{2^n}.$$

由此根据定理3, 幂级数(21)在 $z=z_1$ 处收敛.

2) 设 $l_1=+\infty$, 我们证明级数(21)除了在 $z=z_0$ 以外处处发散. 假设不然, 即设级数(21)在 $z=z_1\neq z_0$ 处收敛. 那么从收敛的必要条件

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(z_1-z_0)^n=0$$

知道, 任给 $\varepsilon>0$, 存在数 N, 当 $n>N$ 时,

$$|a_n(z_1-z_0)^n|<\varepsilon.$$

因此存在数 M, 使对所有的 n, 有

$$|a_n(z_1-z_0)^n|\leqslant M,$$

即

$$\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant\frac{\sqrt[n]{M}}{|z_1-z_0|}$$

成立.

这与 $l_1=+\infty$ 的假设相矛盾.

3) 设 $0<l_1<+\infty$, 考虑任意一点 z_1, $|z_1-z_0|<\frac{1}{l_1}$, 我们来证明级数(21)在 $z=z_1$ 处收敛. 事实上, 由定理9知道, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 有

$$\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant l_1+\varepsilon \quad 即 \quad |a_n|\leqslant(l_1+\varepsilon)^n.$$

由此取 $\varepsilon=\frac{1-l_1|z_1-z_0|}{2|z_1-z_0|}$, 从上式可以得到

$$|a_n(z_1-z_0)^n|\leqslant[(l_1+\varepsilon)|z_1-z_0|]^n=\left(\frac{1+l_1|z_1-z_0|}{2}\right)^n.$$

由于 $l_1|z_1-z_0|<1$，因此级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+l_1|z_1-z_0|}{2}\right)^n$ 收敛. 由此根据定理 3，级数(21)在 $z=z_1$ 处收敛. 所以级数(21)的收敛半径 $R\geqslant\frac{1}{l_1}$.

现在证明，对于任意点 z_2，$|z_2-z_0|>\frac{1}{l_1}$，级数(21)在 $z=z_2$ 处发散. 事实上，根据定理 9，任给 $\varepsilon>0$，存在一串 a_{n_i}，使

$$\sqrt[n_i]{|a_{n_i}|}\geqslant l_1-\varepsilon \quad 即 \quad |a_{n_i}|\geqslant(l_1-\varepsilon)^{n_i}.$$

由此取 $\varepsilon=\frac{l_1|z_2-z_0|-1}{|z_2-z_0|}$，则由上式得到

$$|a_{n_i}(z_2-z_0)^{n_i}|\geqslant((l_1-\varepsilon)|z_2-z_0|)^{n_i}\geqslant1,$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}a_n(z_2-z_0)^n\neq0.$$

这不满足收敛的必要条件. 因而级数(21)在 $z=z_2$ 处发散. 所以级数(21)的收敛半径 $R\leqslant\frac{1}{l_1}$.

归并 $R\geqslant\frac{1}{l_1}$ 与 $R\leqslant\frac{1}{l_1}$，就得到了 $R=\frac{1}{l_1}$. 】

特别地，当

$$l=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \tag{27}$$

或

$$l=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \tag{28}$$

时，就有 $R=\frac{1}{l}$. 后一种情况可以仿微积分学中用的方法来证明，即由(28)可以推出(27).

【例 2】 求证 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$，且收敛半径为 1.

解：因为这个幂级数的系数 $a_n=1$，因此 $l=\lim\limits_{n\to-\infty}\sqrt[n]{a_n}$ $=1$，由此根据定理 10 得其收敛半径为 1．这个级数在 $|z|<1$ 内闭一致收敛且绝对收敛．当 $|z|<1$ 时，即有

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}z^n=\lim_{N\to+\infty}\frac{1-z^{N+1}}{1-z}=\frac{1}{1-z}.$$

【例 3】 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径．

解：因为其系数 $a_n=\frac{1}{n!}$，因此

$$l=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=0.$$

由此根据定理 10 得其收敛半径 $R=+\infty$．级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 在全平面上内闭一致收敛，以后可以知其和函数是 e^z．

【例 4】 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!z^n$ 的收敛半径．

解：因为它的系数 $a_n=n!$，因此

$$l=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=+\infty,$$

由此根据定理 10 得收敛半径 $R=0$．

我们知道，一个多项式在全平面上解析，而幂级数是多项式的推广，由此自然地会问：幂级数在收敛圆内是否表示一个解析函数？这个问题由下述定理给予了肯定．

定理 11 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=f(z) \tag{29}$$

的和函数 $f(z)$ 是收敛圆 $|z-z_0|<R$ 内的一个解析函数，且其各阶导数可以用逐项求导数的方法得到：

$$f^{(p)}(z)=\sum_{n=p}^{\infty}a_n n(n-1)\cdots(n-p+1)(z-z_0)^{n-p}, \quad (30)$$

其中 p 是自然数. 由此得到

$$a_p=\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} \quad (p=0,\ 1,\ 2,\ \cdots). \quad (31)$$

【证】 由于$|z-z_0|<R$是幂级数的收敛圆，因此根据定理 7，这个幂级数就在$|z-z_0|<R$上内闭一致且绝对收敛. 再根据魏尔斯特拉斯第一定理，就立刻得到所需的结果. 由(29)与(30)令 $z=z_0$ 就得到公式(31). 】

习 题 4·1

1. 设函数序列 $f_n(z)=u_n(x,y)+iv_n(x,y)\ (n=1,2,\cdots)$定义在 E 上. 试证要使

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

在 E 上一致收敛的充要条件是:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=u(x,y) \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty}v_n(x,y)=v(x,y)$$

都在 E 上一致收敛.

2. 求函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(z^{n+1}-z^n)$的收敛性及一致收敛性区域.

3. 用第三章中的莫瑞拉定理证明魏尔斯特拉斯第一定理中的 1).

4. 试直接证明定理 9 中的 2).

5. 试证: 实数序列$\{a_n\}$有极限为 l 的充要条件是:

$$l=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,a_n=\underline{\lim_{n\to+\infty}}\,a_n.$$

6. 试证: 当$l=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$时, 幂级数(21)的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{l}$.

. 求下列幂级数的收敛半径及收敛圆:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z-3)^{n+1}$, 它等于什么级数?

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^n}$;

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(z-i)^n$; (5) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\ln n}z^n$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$; (7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}(z-1)^n$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}z^n$, $|q|<1$; (9) $\sum_{n=1}^{\infty}z^{n!}$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+a^n)z^n$.

8. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 R, 且在 $z=z_0$ 处绝对收敛, $|z_0|=R$,试证此级数在 $|z|\leqslant R$ 上一致且绝对收敛.

9. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 R, 试讨论下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{10}a_nz^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)a_nz^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$.

第二节 解析函数的泰勒级数展开

这一节我们研究圆内解析函数能展开为幂级数的问题,即任意一个一般的解析函数可以分解为一些最简单的函数——幂函数的求和. 这样的一种表示方法对于在理论上以及实用上研究解析函数都会带来很大的方便. 例如,应用幂级数展开式,就可以研究解析函数由它的虚部用积分表示的问题,零点的孤立性,解析函数的唯一性等问题.

2.1 圆内解析函数的泰勒级数展开

从上一节的定理 11 知道,圆内收敛的幂级数表示一个解析函数. 这个定理的逆定理也成立. 即

定理1 设函数$f(z)$在圆K: $|z-z_0|<R$内解析，则在此圆内,$f(z)$可以展开成下列的幂级数:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \tag{1}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \tag{2}$$

C是任意圆周: $|z-z_0|=\rho<R$. 这个展开式在K内闭一致收敛而且还是唯一的.

(1)式称为泰勒(Taylor)展开式; a_n称为泰勒系数.

【证】 显然，对K内任意一点z，必存在一个圆周C: $|\zeta-z_0|=\rho<R$, 使得$|z-z_0|<\rho$. 应用柯西公式(第三章第四节定理1)得到

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \quad |z-z_0|<\rho. \tag{3}$$

下面利用柯西核$\dfrac{1}{\zeta-z}$的展开式来证明这个定理. 它经过简单变换后可以转化为函数$\dfrac{1}{1-\xi}$在$|\xi|<1$上的展开式:

$$\frac{1}{1-\xi}=\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n, \quad |\xi|<1. \tag{4}$$

它在$|\xi|<1$上内闭一致收敛. 事实上，因为

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)}=\frac{1}{(\zeta-z_0)(1-\xi)}, \tag{5}$$

其中$\xi=\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}$. 由于$|\xi|=\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\dfrac{|z-z_0|}{\rho}<1$, 所以由(4)得到

$$\frac{1}{1-\xi}=\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$

关于 ζ 在 $|\zeta-z_0|=\rho$ 上一致收敛. 由此从(5)知道

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \tag{6}$$

在 $|\zeta-z_0|=\rho$ 上一致收敛. 用 $f(\zeta)$ 乘级数(6)式两边所得到的级数仍在 $|\zeta-z_0|=\rho$ 上一致收敛, 根据上节定理 4 中的 2), 它可以在 $|\zeta-z_0|=\rho$ 上逐项积分, 因此得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_C\frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

其中 a_n 是由公式(2)所确定的. 由此再利用柯西公式(3)就可证得展开式(1).

关于公式(2)中的积分曲线(这里是圆周) C, 根据多连通区域中的柯西定理(参看第三章第四节定理 2) 知道: C 的半径 ρ 是可以任意的, 只要它满足 $0<\rho<R$ 即可. 公式 (2) 中第二个等式是利用第三章中的高阶导数公式(参看第三章第四节定理 3)得到的.

此外, 幂级数(1)由它本身的收敛性及根据上一节的定理 7 知道, 它在 $|z-z_0|<R$ 上是内闭一致收敛的.

关于展开的唯一性, 也是很显然的. 事实上, 假若 $f(z)$ 还有其他的展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n,$$

则从上一节定理 11 知道, 其系数为

$$b_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\quad(n=0,\ 1,\ \cdots).$$

将此式与式(2)作比较, 就可看出展开式是唯一的. ▮

泰勒级数展开的唯一性这个事实有利于我们具体地将一

个函数展开为泰勒级数. 因为不管我们用什么方法，只要每一步都合理，则所得到的函数的幂级数展开式都一定是函数的泰勒级数展开式.

这个定理连同上节的定理11说明了：以某一点 z_0 为中心的圆内的解析函数与此圆内的幂级数[见上节的公式(21)]之间存在着一一对应的关系. 这个结果在微积分学中是没有的，也就是说，一个区间上有导数的函数不一定在此区间上可以展开为幂级数. 例如函数 $\frac{1}{1+x^2}$，在整个实轴上对它可求无穷多次导数，但却不能在实轴上展开为幂级数. 以后要说明不能展开的本质理由.

此外，如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，z_0 是区域 D 内的任一点，设 z_0 到 D 的边界 ∂D 的距离为 d，则函数 $f(z)$ 在圆 $|z-z_0|<d$ 内解析，因此根据上面的定理1，函数 $f(z)$ 就可以在圆 $|z-z_0|<d$ 内展开为泰勒级数(1)，此时幂级数(1)的收敛半径 $R\geqslant d$.

【例1】 将函数 $\frac{1}{1+z^2}$ 在 $z=0$ 的邻域中展开为泰勒级数.

解：由于函数 $\frac{1}{1+z^2}$ 在全平面上只有两个不解析的点 $z=\pm i$，因此它在 $|z|<1$ 内解析. 由本节定理1，它在 $|z|<1$ 中可展开成泰勒级数(1). 利用公式(4)，得到

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}, \quad |z|<1.$$

其收敛半径 $R=1$.

【例2】 求函数 $\frac{1}{1+z^2}$ 在 $z=1$ 邻域中的泰勒展开式.

解：已知函数$\frac{1}{1+z^2}$在全平面上只有两个点$z=\pm i$不解析，因此它在$|z-1|<\sqrt{2}$上解析．利用展开式(4)，得到

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(z-1)+(1-i)}-\frac{1}{(z-1)+(i+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{1-i}}-\frac{1}{i+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{i+1}}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}}-\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right](z-1)^n.$$

利用$1-i=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$，$1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$，由上式得到

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{4}}{2^{\frac{n+1}{2}}}(z-1)^n.$$

容易证明

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{\left|\sin(n+1)\frac{\pi}{4}\right|}{2^{\frac{n+1}{2}}}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}.$$

事实上，当$n+1=2k$时，有

$$\lim_{k\to+\infty}\sqrt[2k-1]{\frac{\left|\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right|}{2^{\frac{2k}{2}}}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}},$$

且
$$\sqrt[n]{\frac{\left|\sin(n+1)\frac{\pi}{4}\right|}{2^{\frac{n+1}{2}}}}\leqslant\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2n}}}\leqslant\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}.$$

由此根据上节定理 10，得其收敛半径 $R=\sqrt{2}$.

从上面两个例子可看到：在幂级数展开式的收敛圆的边界上，都有函数 $f(z)$ 的不解析的点. 这个事实在后面还要作详细讨论.

总结对解析函数的讨论，我们得到四个等价的解析函数的概念，这些概念从不同的角度反映了解析函数的深刻性质. 叙述如下：若函数 $f(z)$ 在区域 D 内满足下列条件之一，则它就是 D 内的一个解析函数：

1) 函数 $f(z)$ 在 D 内处处有导数；

2) 函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 的实部与虚部在 D 内可微，且满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y};$$

3) 函数 $f(z)$ 在 D 内连续，并对 D 内任何闭曲线 C，都有

$$\int_C f(z)dz=0;$$

4) 对于 D 内任一点，都存在一个邻域，函数 $f(z)$ 在此邻域中能展开成幂级数.

下面再举几个例子，将已知的几个初等函数展开成为幂级数.

【例 3】 求 e^z 在 $z=0$ 处的泰勒级数.

解：函数 $f(z)=e^z$ 在全平面解析，因此根据本节定理 1，它能在全平面上展开为幂级数. 已知 $(e^z)'=e^z$，所以其展开式中的系数 a_n 可由公式(2)得到

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{n!},$$

因而

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots. \tag{7}$$

【例 4】 求 $\cos z$ 在 $z=0$ 处的泰勒级数.

解：函数 $f(z)=\cos z$ 在全平面解析，因此根据本节定理 1，它能在全平面上展开为幂级数. 由(7)得到

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}. \tag{8}$$

根据幂级数展开式的唯一性，这个展开式必是它的泰勒级数.

【例 5】 求 $\sin z$ 在 $z=0$ 处的泰勒级数.

解：函数 $f(z)=\sin z$ 在全平面解析，因此根据定理 1，它能在全平面上展开为幂级数. 由(7)得到

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{9}$$

【例 6】 求函数 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒级数.

解：根据定义

$$\ln(1+z)=\ln r+i\arg(1+z),$$

其中 $r=|1+z|$，而

$$-\pi<\arg(1+z)<\pi$$

(见图4-1)，显然函数 $f(z)=\ln(1+z)$ 就在单位圆 $|z|<1$ 内解析，所以在此圆内，它可以在 $z=0$ 处展开为幂级数. 显然 $f(0)=0$，$e^{f(z)}=1+z$. 利用反函数的导数的定理（见第二章第二节定理 3)，容易得到

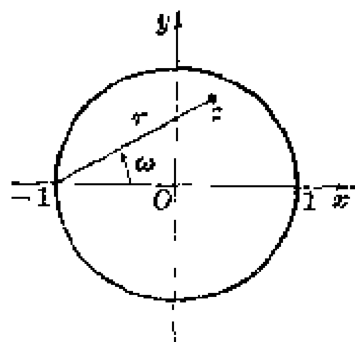


图 4-1

$$f'(z)=\frac{1}{(e^w-1)'}\bigg|_{w=f(z)}=\frac{1}{e^w}\bigg|_{w=f(z)}=\frac{1}{e^{f(z)}}=\frac{1}{1+z}.$$

由此得到

$$f^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+z)^n},$$

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

这样一来，$\ln(1+z)$的展开式中的系数 a_n 由(2)可得

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

因此得到在$|z|<1$中有

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots. \quad (10)$$

容易看出，这个幂级数的收敛半径也正好等于1.

【例 7】 求函数$(1+z)^\alpha$在$z=0$处的泰勒级数，其中α是一个复常数.

解：规定$(1+z)^\alpha=e^{\alpha\ln(1+z)}$，其中$\ln(1+z)$的性质与上例中相同，这样一来，$g(z)=(1+z)^\alpha$在区域$-\pi<\arg(1+z)<\pi$上就是一个单值解析函数了. 因而显然有

$$g'(z)=\alpha e^{\alpha\ln(1+z)}\cdot\frac{1}{1+z}=\alpha e^{(\alpha-1)\ln(1+z)}.$$

所以

$$g^{(n)}(z)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)e^{(\alpha-n)\ln(1+z)}$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

这样一来，

$$g^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1).$$

又显然 $\qquad g(0)=1.$

因为函数$g(z)$在$-\pi<\arg(1+z)<\pi$上解析，所以它在$|z|<1$上解析，根据本节定理1，它可以在$z=0$处展开为泰勒级数，其收敛圆为$|z|<1$，而系数a_n由公式(2)确定，即

$$a_n=\frac{g^{(n)}(0)}{n!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

因此在$|z|<1$内,就有

$$(1+z)^\alpha=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots. \qquad (11)$$

【例 8】 求函数$\sec z=\frac{1}{\cos z}$在$z=0$处的泰勒级数.

解: 因为函数$f(z)=\frac{1}{\cos z}$在$|z|<\frac{\pi}{2}$内解析, 因此根据本节定理1,它在$|z|<\frac{\pi}{2}$内$z=0$处可以展开为泰勒级数. 设为

$$f(z)=\frac{1}{\cos z}=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots,$$

其中$a_i(i=0, 1, 2, \cdots)$是待定系数. 因为$\sec z$是偶函数, 即

$$f(z)=f(-z)=a_0-a_1z+a_2z^2-\cdots+a_n(-1)^nz^n+\cdots.$$

把上面两个等式相加后除 2, 得到

$$f(z)=\frac{1}{\cos z}=a_0+a_2z^2+a_4z^4+\cdots+a_{2n}z^{2n}+\cdots,$$

利用$\cos z$的展式(8),得到

$$1=(a_0+a_2z^2+a_4z^4+\cdots)\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots\right).$$

因为幂级数在收敛圆内都绝对收敛,因此从第一章知道,可以直接进行相乘,由此得到

$$1=a_0+\left(a_2-\frac{a_0}{2!}\right)z^2+\left(a_4-\frac{a_2}{2!}+\frac{a_0}{4!}\right)z^4+\cdots$$
$$+\left(a_{2n}-\frac{a_{2n-2}}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{a_0}{(2n)!}\right)z^{2n}+\cdots.$$

根据幂级数展开的唯一性，比较两边系数，得到

$$a_0=1,\ a_2-\frac{a_0}{2!}=0,\quad a_4-\frac{a_2}{2!}+\frac{a_0}{4!}=0,\ \cdots,$$

$$a_{2n}-\frac{a_{2n-2}}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{a_0}{(2n)!}=0.$$

于是得 $a_0=1,\ a_2=\frac{1}{2!},\ a_4=\frac{5}{4!},\ \cdots.$

因而 $$\sec z=1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{5}{4!}z^4+\cdots.$$

【例 9】 求函数 $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$ 在 $z=0$ 处泰勒级数的前四项.

解：按要求，只需求到 z^3 的系数就够了. 今后用 $O(z^k)$ 表示一个幂级数，它表示从 z^k 项开始，其中 k 是正整数.

显然，

$$\frac{z}{z-1}=-z(1+z+z^2+O(z^3))=-(z+z^2+z^3+O(z^4)).$$

而

$$e^{\frac{z}{z-1}}=1+(-z-z^2-z^3+O(z^4))+\frac{(z+z^2+z^3+O(z^4))^2}{2}$$

$$-\frac{(z+z^2+z^3+O(z^4))^3}{6}+O(z^4)$$

$$=1-z-z^2-z^3+O(z^4)+\frac{z^2+2z^3+O(z^4)}{2}$$

$$-\left(\frac{z^2+2z^3+O(z^4)}{2}\right)\cdot\left(\frac{z+z^2+z^3+O(z^4)}{3}\right)+O(z^4)$$

$$=1-z-z^2-z^3+\frac{z^2}{2}+z^3-\frac{z^3}{6}+O(z^4)$$

$$=1-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{6}+O(z^4).$$

下面介绍一个重要不等式，叫做柯西不等式，利用它可

以估计函数的泰勒级数展开式中的系数.

定理2 设函数$f(z)$在$|z|<R$内解析，则$f(z)$在$|z|<R$中的泰勒展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \tag{12}$$

中的系数有估计式

$$|a_n|\leqslant\frac{M(R)}{R^n}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots), \tag{13}$$

其中

$$M(R)=\sup_{|z|<R}|f(z)|. \tag{14}$$

不等式(13)称为*系数的柯西*(Cauchy)*不等式*.

【证】 根据定理1，函数$f(z)$有展开式(12)，其中

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

利用第三章第四节定理5中高阶导数的柯西不等式

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant\frac{(M(R))n!}{R^n},$$

即得不等式(13)，其中$M(R)$由(14)所确定. ∎

2.2 施瓦兹公式及波阿松公式

解析函数可以通过其实部积分来表示，这个事实在很多情况下往往是很有用的.

定理3 设函数$f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$在圆$|z|<R$内解析，在闭圆$|z|\leqslant R$上连续，则

$$f(z)=i\beta_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R\cos\psi,\ R\sin\psi)\frac{Re^{i\psi}+z}{Re^{i\psi}-z}d\psi,$$
$$|z|<R. \tag{15}$$

这个公式称为*施瓦兹*(Schwarz)*公式*，其中β_0为实常数；且

$$
\begin{aligned}
&u(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R\cos\psi,\ R\sin\psi)\operatorname{Re}\left(\frac{Re^{i\psi}+z}{Re^{i\psi}-z}\right)d\psi\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R\cos\psi,\ R\sin\psi)\\
&\quad\cdot\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\theta)+r^2}d\psi,\qquad z=re^{i\theta},\ r<R.
\end{aligned}\tag{16}
$$

这个公式称为泊阿松(Poisson)公式.

【证】 根据定理1,在$|z|<R$内有

$$
f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\tag{17}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
a_n&=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{i\psi})}{R^{n+1}e^{i(n+1)\psi}}Rie^{i\psi}\,d\psi.
\end{aligned}
$$

由此得到

$$
\begin{aligned}
a_nR^n&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(Re^{i\psi})e^{-in\psi}d\psi\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(R\cos\psi,\ R\sin\psi)\\
&\quad+iv(R\cos\psi,\ R\sin\psi)]e^{-in\psi}d\psi.
\end{aligned}\tag{18}
$$

此外,利用柯西定理,得

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=R}f(\zeta)\zeta^{n-1}d\zeta=0\quad(n=1,\ 2,\ \cdots),
$$

即

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(Re^{i\psi})e^{in\psi}d\psi=0,
$$

或

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(R\cos\psi,\ R\sin\psi)\\
&\quad+iv(R\cos\psi,\ R\sin\psi)]e^{in\psi}d\psi=0.
\end{aligned}
$$

两边取共轭后得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(R\cos\psi,\ R\sin\psi)$$
$$-iv(R\cos\psi,\ R\sin\psi)]e^{-in\psi}d\psi=0. \qquad (19)$$

将(18)与(19)两式相加，得到

$$\pi a_n R^n=\int_0^{2\pi}u(R\cos\psi,\ R\sin\psi)e^{-in\psi}d\psi \quad (n=1,\ 2,\ \cdots). \qquad (20)$$

此外

$$a_0=f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(Re^{i\psi})d\psi$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(R\cos\psi,\ R\sin\psi)$$
$$+iv(R\cos\psi,\ R\sin\psi)]d\psi=\alpha_0+i\beta_0, \qquad (21)$$

其中

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R\cos\psi,\ R\sin\psi)d\psi;$$
$$\beta_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(R\cos\psi,\ R\sin\psi)d\psi. \qquad (22)$$

现在将(20)，(21)代入(17)，得到

$$f(z)=i\beta_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R\cos\psi,\ R\sin\psi)d\psi$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R\cos\psi,\ R\sin\psi)\cdot\frac{z^n}{R^n}e^{-in\psi}d\psi,$$
$$|z|<R. \qquad (23)$$

考虑级数

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{R^n}e^{-in\psi},\quad \left|\frac{z}{R}e^{-i\psi}\right|=\frac{|z|}{R}<1,$$

它关于ψ在$[0,\ 2\pi]$上是一致收敛的，其和为

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{1-\frac{z}{R}e^{-i\psi}}-1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\frac{z}{R}e^{-i\psi}}{1-\frac{z}{R}e^{-i\psi}}.$$

由此在等式(23)中进行逐项积分后，就得到

$$f(z)=i\beta_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R\cos\psi,\ R\sin\psi)\frac{1+\frac{z}{R}e^{-i\psi}}{1-\frac{z}{R}e^{-i\psi}}d\psi$$

$$=i\beta_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R\cos\psi,\ R\sin\psi)\frac{Re^{i\psi}+z}{Re^{i\psi}-z}d\psi,$$

$$|z|<R.$$

公式(15)证毕. 将公式(15)两边取实部，注意到 $z=re^{i\theta}$，得到

$$\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\psi}+z}{Re^{i\psi}-z}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i(\psi-\theta)}+r}{Re^{i(\psi-\theta)}-r}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left(\frac{R\cos(\psi-\theta)+r+iR\sin(\psi-\theta)}{R\cos(\psi-\theta)-r+iR\sin(\psi-\theta)}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\{[R\cos(\psi-\theta)+r+iR\sin(\psi-\theta)]$$

$$\times[R\cos(\psi-\theta)-r-iR\sin(\psi-\theta)]$$

$$\div[[R\cos(\psi-\theta)-r]^2+R^2\sin^2(\psi-\theta)]\}$$

$$=\{[R\cos(\psi-\theta)+r][R\cos(\psi-\theta)-r]$$

$$+R^2\sin^2(\psi-\theta)\}\div[R^2-2Rr\cos(\psi-\theta)+r^2]$$

$$=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\theta)+r^2}.$$

从而就可立刻得到公式(16). ∎

施瓦兹公式说明了：通过调和函数在边界上的值，可以确定它所对应的解析函数以及其共轭调和函数 $v(x, y)$ 在区域内的值. 这个事实在三角级数的一些理论研究中是很重要的. 波阿松公式说明了：调和函数完全由它的边界上的值所确定.

2.3 零点的孤立性及唯一性定理

在很多实际问题中，往往需要研究一个函数等于零的点，也就是求根．最简单的情况是：在解常系数线性微分方程时，将这个问题转化为求其特征多项式的根的问题．一个 n 次多项式有 n 个根，而多项式是解析函数，那么一个解析函数有几个根呢？显然也有 n 个根．但在一般情况下，它可能有无穷多个根．那么这无穷多个可能的根的分布情况如何呢？这个问题是属于值的分布论中的问题．在这里我们不准备进行讨论了，而只准备从唯一性的角度来考虑，也即从函数 $f(z)$ 根的分布情况来研究 $f(z)\equiv 0$ 的问题．这有下列定理：

定理 4 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，E 是 D 内一个点集，它至少有一个凝聚点 $z_0\in D$．若 $z\in E$ 时，$f(z)=0$，则 $f(z)\equiv 0$．

【证】 因为 $z_0\in D$ 是集合 E 的凝聚点，而函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 连续，因此有

$$f(z_0)=\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=0.$$

此外，由于 $z_0\in D$，所以必存在一个圆 $|z-z_0|<R\subset D$．根据定理 1，在 $|z-z_0|<R$ 内，有

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots, \tag{24}$$

其中

$$f(z_0)=0. \tag{25}$$

以后就称 z_0 为函数 $f(z)$ 的一个零点．下面证明 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内恒为零．

用反证法：若函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 中不恒为零，可以

认为

$$f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0,\ \cdots,\ f^{(p-1)}(z_0)=0,\ f^{(p)}(z_0)\neq 0. \tag{26}$$

以后称 p 为函数 $f(z)$ 的零点 z_0 的级．由此得到

$$f(z)=(z-z_0)^p\varphi(z), \tag{27}$$

其中

$$\varphi(z)=\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}+\frac{f^{(p+1)}(z_0)}{(p+1)!}(z-z_0)+\cdots \tag{28}$$

仍然在 $|z-z_0|<R$ 中收敛．因此根据上节定理 11，它是 $|z-z_0|<R$ 中的一个解析函数，且 $\varphi(z_0)\neq 0$．由于函数 $\varphi(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续，因此任取 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使得当 $|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$|\varphi(z)-\varphi(z_0)|<\varepsilon.$$

特别，取 $\varepsilon=\frac{|\varphi(z_0)|}{2}>0$，则由上面不等式知

$$|\varphi(z)|>|\varphi(z_0)|-\varepsilon=|\varphi(z_0)|-\frac{|\varphi(z_0)|}{2}=\frac{\varphi(z_0)}{2}.$$

因此函数 $\varphi(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 中无零点．由此得到函数 $f(z)=(z-z_0)^p\varphi(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 中也无零点，这就违反了 z_0 是函数的在 E 中的零点的凝聚点的假设．这个矛盾就说明了在 $|z-z_0|<R$ 中 $f(z)\equiv 0$．

从上面的证明过程可以看出：对于任意一点 z^*，只要它是函数 $f(z)$ 的零点的一个凝聚点，且若圆 $|z-z^*|<R\subset D$，则就可以推出函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 中恒为零．对于区域 D 内的任意一点 Z，存在连接 z_0 及 Z 的折线 C，$C\subset D$．应用在证明最大模原理时用过的方法，也可以在此折线 C 上，依次证明在每一个节点处 $f(z)=0$，因而在 Z 处 $f(z)=0$．】

推论 1 设函数 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 在区域 D 上解析；集合 E

是 D 内的点集，且 E 有一个凝聚点 z_0 属于区域 D. 若在 E 上，$f_1(z)=f_2(z)$，则在整个区域 D 内，$f_1(z)\equiv f_2(z)$.

事实上，只要考虑函数 $f(z)=f_1(z)-f_2(z)$，应用上面的定理 4 即得证.

推论 2 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，$f(z)\not\equiv 0$. 若在 D 内存在点 z_0，使 $f(z_0)=0$，则必存在区域 $0<|z-z_0|<R$，在此区域内，函数 $f(z)\neq 0$.（这个结果称为零点孤立性定理.）

事实上，假定这种区域 $0<|z-z_0|<R$ 不存在，则任给数 n，在区域 $0<|z-z_0|<\frac{1}{n}$ 上必存在一点 z_n，使得 $f(z_n)=0$，这样就会得到一个序列 $\{z_n\}$，它有无穷多个不相同的点，且以 z_0 为其极限. 由此应用定理 4，会导致矛盾. 从而推论得证.

最后还需说明：在定理 4 的条件中，要求函数 $f(z)=0$ 的点集 E 在函数 $f(z)$ 解析的区域中至少有一个凝聚点的条件是必要的. 事实上，考虑函数 $\sin\frac{1}{1-z}$，它在全平面上除了 $z=1$ 以外解析. 这个函数有无穷多个零点 $z_n=1-\frac{1}{n\pi}$（$n=1,2,\cdots$），但由于这些零点的极限为 $z=1$，它不在函数 $\sin\frac{1}{1-z}$ 的解析性区域中，因此它不恒为零.

下面举例说明唯一性定理的应用.

【例 10】 求证复函数 $\sin z$ 是实函数 $\sin x$ 的唯一的推广，也就是若有一个解析函数 $F(z)$，使 $F(x)=\sin x$，则 $F(z)=\sin z$.

解：因为函数 $\sin z$ 与 $F(z)$ 都是解析函数，且在实轴上都等于 $\sin x$，因此相等. 实轴上任意一点都是其解析性区域中的凝聚点，由此根据定理 4 的推论 1，$F(z)$ 与 $\sin z$ 在解析性

区域中处处相等.

【例 11】 用唯一性定理证明

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1. \tag{29}$$

解：因为 $f_1(z)=\sin^2 z+\cos^2 z$ 是全平面上的解析函数，$f_2(z)\equiv 1$ 也是全平面上的解析函数，而在实轴上，$f_1(x)=f_2(x)$. 由此应用定理 4 的推论 1 得到 $f_1(z)\equiv f_2(z)$，即公式(29)成立.

【例 12】 用唯一性定理求函数 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒级数.

解：已知

$$\ln(1+z)=\ln|1+z|+i\arg(1+z),$$

其中

$$-\pi<\arg(1+z)<\pi.$$

因此它在 $|z|<1$ 中解析.

此外，在微积分学中，我们知道，当 $-1<x<1$ 时，有

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

现在将上面级数中的 x 换为 z，考虑级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1},$$

利用它在 $z=x<1$ 处收敛，应用阿贝尔第一定理及上节的定理 11，它必在 $|z|<1$ 内闭一致收敛，且其和函数 $F(z)$ 是 $|z|<1$ 中的解析函数. 所以 $F(x)=\ln(1+x)$.

已知 $\ln(1+z)$ 当 $z=x$ 时也是 $\ln(1+x)$，因此应用唯一性定理(定理 4 的推论 1)得到：在 $|z|<1$ 中 $F(z)\equiv\ln(1+z)$，由此得到

$$\ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}.$$

由这样的方法可以看出：很多微积分学中的一些初等函

数的展开式都可以推广到复数域中来.

在定理4的证明中，曾经引进解析函数以 $z=z_0$ 为其 p 级零点的概念. 这个概念也是很重要的，它是多项式重根的概念的推广.

【例 13】 求 $\sin z-1$ 的全部零点，并指出它们是几级零点?

解：由 $\sin z-1=0$ 得到

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=1 \quad 即 \quad e^{2iz}-2ie^{iz}-1=0.$$

由此得到

$$(e^{iz}-i)^2=0.$$

因而

$$e^{iz}=i,\ z=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k=0,\ \pm1,\ \cdots).$$

这就是 $\sin z-1$ 的全部零点.

显然，

$$(\sin z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi}=\cos z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi}=0;$$

$$(\cos z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi}=-\sin z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi}=-1\neq 0.$$

由此从定义知道：$z=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 都是函数 $\sin z-1$ 的二级零点.

习 题 4·2

1. 求 $\operatorname{tg} z$ 的全部零点，并指出它们是几级零点?
2. $(\operatorname{sh} z)^2=\left(\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}\right)^2$ 以 $z=0$ 为几级零点?
3. 把函数 $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$ 分别展开为 z 的幂级数及 $z-1$ 的幂级数，并指出它们的收敛半径.
4. 把下列函数展开为幂级数，并求其收敛半径:

(1) $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ 在 $z=0$ 处； (2) $\dfrac{1}{z}$ 在 $z=2$ 处；

(3) $\sqrt{z-1}$ 在 $z=0$ 处.

5. 将下列函数在 $z=0$ 处展开为幂级数，只要前面四项，并求其收敛半径：

(1) $\operatorname{tg} z$； (2) $\sin\dfrac{1}{1-z}$； (3) $\ln(1+e^z)$.

6. 求下列函数在 $z=0$ 处的泰勒级数：

(1) $\dfrac{1}{2}\left(\ln\dfrac{1}{1-z}\right)^2$； (2) $\sin^2 z$；

(3) $\operatorname{ch}^2 z$.

7. 用刘维尔定理证明代数基本定理.

8. 设函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析，$f(z)\neq$ 常数. 试证：在任意一条包括其内部属于区域 G 的闭曲线内的点 $f(z)=A$ 只有有限个根，其中 A 是任意复数.

9. 判断是否存在在 $z=0$ 处的解析函数 $f(z)$，在点 $z_n=\dfrac{1}{n}$ 处取下列的函数值：

(1) $0, 1, 0, \dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{4}, \cdots$；

(2) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \cdots$；

(3) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}, \cdots$.

10. 试举一例，说明函数 $f(z)$ 在某个区域内解析且有无穷多个零点，但 $f(z)\not\equiv 0$.

11. 用唯一性定理从 $\sin x$ 的幂级数展开式来得到 $\sin z$ 的展开式.

12. 试证：对任意两个复数 z_1 及 z_2，有

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cdot\cos z_2-\sin z_1\cdot\sin z_2;$$

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cdot\cos z_2+\cos z_1\cdot\sin z_2$$

(用唯一性定理).

第三节　解析函数的罗朗展开式

3.1　环内解析函数的罗朗展开

从上一节中我们看到，圆内的解析函数可以在圆内展开为泰勒级数．但是如果函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 不解析，而在 $z=z_0$ 的邻域中的其他点上都解析，则就不一定能够在 $z=z_0$ 处展开为泰勒级数了．但这种函数在很多理论及实际问题中却是常常会遇到的．因此，我们自然要问：能否还有其他方法把一个以 $z=z_0$ 为中心的圆环内的解析函数表示为某种另外的简单形状的级数呢？看下面的例子：

【例 1】　函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ 在 $z=0$ 以及 $z=1$ 都不解析，但在圆环 $0<|z|<1$ 及 $0<|z-1|<1$ 内是解析的．求其在这两个圆环中的最简单形状的展开式．

解：先研究在圆环 $0<|z|<1$ 内的情况：这样有

$$f(z)=-\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots,\quad |z|<1.$$

由此看出 $f(z)$ 在圆环 $0<|z|<1$ 中是可以展开为级数的，只是除了 z 的正幂以外，还出现了 z 的负幂．

再考虑圆环 $0<|z-1|<1$ 内的情况：

$$\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{1-(1-z)}\right)\\
&=\frac{1}{z-1}(1+(1-z)+(1-z)^2+\cdots+(1-z)^n+\cdots)\\
&=\frac{1}{z-1}+1+(1-z)+\cdots+(1-z)^{n-2}+\cdots,
\end{aligned}$$

$$0<|z-1|<1.$$

其中除了 $z-1$ 的正幂以外，也出现了 $z-1$ 的负幂.

由此可推想：在圆环 $r<|z-z_0|<R$ 内的解析函数 $f(z)$ 是否可能展开为 $z-z_0$ 的正幂以及 $z-z_0$ 的负幂的级数，也即如下形式的级数呢？

$$f(z)=\cdots+c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0$$
$$+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots.$$

为此，我们首先对上述形状的级数作一讨论.

定义 1 关于级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \tag{1}$$

若对于某一点 z，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad 及 \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n \tag{2}$$

分别收敛，将它们的和分别记作 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$，则称级数(1)在 z 处收敛，记其和为 $f_1(z)+f_2(z)$；否则，就称级数(1)在 z 处发散.

若(2)中的两个级数都在集合 E 上收敛，则称(1)在集合 E 上收敛.

若(2)中的两个级数都在集合 E 上绝对收敛或一致收敛，则称(1)在集合 E 上绝对收敛或一致收敛.

已知级数(2)中的第一个级数的收敛区域是一个圆 $|z-z_0|<R$，并在此圆内绝对收敛且内闭一致收敛. 对于(2)中的第二个级数，作变换 $\zeta-z_0=\dfrac{1}{z-z_0}$ 后，就得到 $\zeta-z_0$ 的幂级数，由此看出，(2)中第二个级数的收敛区域是圆外：$|z-z_0|>r$，且在此区域中也是绝对收敛且内闭一致收敛. 这样一来，若 $r<R$，则级数(1)就在圆环 $r<|z-z_0|<R$ 内绝对收敛且内闭一致收敛了，因而根据魏尔斯特拉斯第一定理，它的和

就是此圆环中的解析函数.

反过来,上述结论的逆命题也成立. 这有下面的定理:

定理 1 设函数 $f(z)$ 在环形区域 $r<|z-z_0|<R$ 内解析 ($r\geqslant 0,\ R\leqslant +\infty$), 则函数 $f(z)$ 可以在此区域内唯一地展开为双边的无穷级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n, \tag{3}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots), \tag{4}$$

而 Γ 为任意圆周 $|z-z_0|=\rho,\ r<\rho<R$.

【证】 在此仍然用柯西公式来证明这个定理. 考虑两个圆周:

$$\Gamma_1:\ |\zeta-z_0|=\rho_1,$$
$$\Gamma_2:\ |\zeta-z_0|=\rho_2,$$

其中 $r<\rho_1<\rho_2<R$(见图 4-2). 对于圆环 $\rho_1<|z-z_0|<\rho_2$ 内的任一点 z, 根据上一章中的柯西公式(见第三章第四节定理 1),有

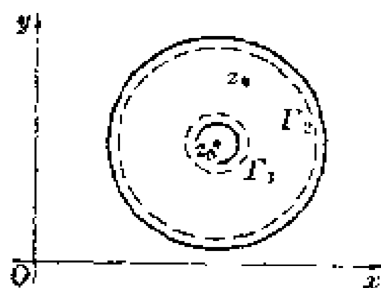


图 4-2

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta. \end{aligned} \tag{5}$$

首先考虑第一个积分:用在上一节中证明定理 1 的方法,完全类似地可得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-z_0)^n, \quad |z-z_0|<\rho_2, \tag{6}$$

其中

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

现在考虑第二个积分，为了应用第二节中的展开式(4)，注意到，当$|\zeta-z_0|=\rho_1$时，$|z-z_0|>\rho_1=|\zeta-z_0|$，因此有

$$\frac{1}{z-\zeta}=\frac{1}{(z-z_0)\left(1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)}, \tag{7}$$

且
$$\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|=\frac{\rho_1}{|z-z_0|}<1.$$

应用第二节中的公式(4)，由上面的(7)就得到

$$\frac{1}{z-\zeta}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}. \tag{8}$$

且在$|\zeta-z_0|=\rho_1$上一致收敛．这样一来，以$\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$乘(8)的两边，并利用本章第一节定理4中的2)，就得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{(z-z_0)^n}, \tag{9}$$

其中
$$B_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}d\zeta \quad (n=1,2,\cdots).$$

根据多连通区域的柯西定理(见第三章第二节定理4)，对于任意一个圆周Γ: $|z-z_0|=\rho$, $r<\rho<R$，都有

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta \quad (n=0,1,2,\cdots);\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}B_n&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}d\zeta \quad (n=1,2,\cdots).\end{aligned} \tag{11}$$

结合(5)、(6)、(9)以及(10)、(11)就可得到展开式(3)，其中

$$a_n=\begin{cases}A_n & (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots);\\ B_{-n} & (n=-1,\ -2,\ \cdots).\end{cases}$$

因而 a_n 就有积分表示式(4). 由于 ρ_1、ρ_2 的任意性，$r<\rho_1<\rho_2<R$, 因此展开式(3)在 $r<|z-z_0|<R$ 内成立,根据前面的讨论知,它在 $r<|z-z_0|<R$ 内闭一致收敛.

下面证明展开式(3)的唯一性. 设函数 $f(z)$ 还有一个展开式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n(z-z_0)^n,\ r<|z-z_0|<R. \qquad (12)$$

根据前面的讨论，级数(12)在圆环 $r<|z-z_0|<R$ 内部内闭一致收敛. 现在在等式(12)两边乘上函数 $\frac{1}{2\pi i}(z-z_0)^{-m-1}$, 其中 m 为任意整数，然后在圆周 Γ: $|z-z_0|=\rho$, $r<\rho<R$ 上积分. 根据一致收敛的级数可以逐项积分的性质，从(12)得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}dz=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(z-z_0)^{n-m-1}d\zeta=b_m.$$

即 $b_m=a_m$ (m 为任意整数). 展开式(3)的唯一性得到证明.】

展开式(3)称为函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处的罗朗 (Laurent) 展开式,或称罗朗级数.

从上面的讨论,使我们还可知道,级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\varphi(z) \qquad (13)$$

在 $|z-z_0|<R$ 内闭一致收敛,由魏尔斯特拉斯第一定理推出, $\varphi(z)$ 是 $|z-z_0|<R$ 内的解析函数. 同样

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-z_0)^n=\psi(z) \qquad (14)$$

在 $|z-z_0|>r$ 内闭一致收敛，$\psi(z)$ 是 $|z-z_0|>r$ 内的解析函

数．因而有

$$f(z)=\varphi(z)+\psi(z),\ r<|z-z_0|<R.$$

我们把级数(13)称为级数(3)的解析部分；把级数(14)称为级数(3)的主要部分．

【例 2】 求函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $1<|z|<2$ 以及 $2<|z|<+\infty$ 上的罗朗展开式．

解：对于在 $1<|z|<2$ 上，有

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

对于在 $2<|z|<-\infty$ 上，有

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}.$$

根据展开的唯一性，它们必是对应区域中的罗朗展开式．

这里同一个函数有两个不同的展开式，这与展开式的唯一性并不矛盾，因为这两个展开式是对不同的圆环展开的，而唯一性的结论只是对同一个圆环展开时成立．

3.2 解析函数在无穷远点的邻域中的展开

设函数 $f(z)$ 在无穷远点的邻域中（除了无穷远点以外），即 $r<|z|<+\infty$ 中解析．根据本节定理 1，有

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n \quad (r<|z|<+\infty) \tag{15}$$
$$=\varphi_1(z)+\psi_1(z).$$

其中 $\qquad \varphi_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n,\quad \psi_1(z)=\sum_{n=0}^{-\infty}a_nz^n.$

如果我们将(15)看作是函数 $f(z)$ 在无穷远点邻域中的展开式，那么对于函数 $\varphi_1(z)$ 及 $\psi_1(z)$，把哪个看作函数 $f(z)$(或级数(15))的解析部分，把哪个看作 $f(z)$ 的主要部分呢？

我们作变换 $\zeta=\dfrac{1}{z}$，令 $f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)=F(\zeta)$，它就在圆环 $0<|\zeta|<\dfrac{1}{r}$ 内解析，且无穷远点就变为原点了．从级数(15)就得到

$$F(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\frac{1}{\zeta^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\zeta^n}+\sum_{n=0}^{-\infty}a_n\frac{1}{\zeta^n}=\psi(\zeta)+\Phi(\zeta),$$

其中 $\qquad \psi(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{\zeta^n},\quad \Phi(\zeta)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_{-n}\zeta^n.$

且 $\qquad \varphi_1\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)=\psi(\zeta),\quad \psi_1\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)=\Phi(\zeta).$

由此，根据上面讨论过的，我们应该把 $\Phi(\zeta)$ 看作 $F(\zeta)$ 的解析部分；把 $\psi(\zeta)$ 看作 $F(\zeta)$ 的主要部分．回到 z 平面时，就应该将 $\psi_1(z)$——即展开式中有负幂项的部分，看作函数 $f(z)$ 在无穷远点邻域中展开的解析部分；将 $\varphi_1(z)$——即展开式中有正幂项的部分，看作函数 $f(z)$ 在无穷远点邻域中展开的主要部分．显然有

$$\lim_{z\to\infty}\psi_1(z)=\lim_{\zeta\to0}\Phi(\zeta)=\Phi(0)=a_0.$$

习 题 4·3

1．求下列函数的罗朗展开式：

(1) $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$，在 $|z|>3$；

(2) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}$，在 $1<|z|<2$ 及 $|z|>2$；

(3) $\dfrac{1}{z^2(z-i)}$，在以 i 为中心的圆环中展开，并指出在何处收敛.

(4) $e^{\frac{1}{1-z}}$，在 $1<|z|<\infty$ 中展开，只要三项负幂.

2. 把函数 $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ 展成罗朗级数，其中 $|a|<|b|$，a、b 都是复数.

(1) $0<|a|<|z|<|b|$；　　(2) $|z|>|b|$.

第四节　孤立奇点的分类及其性质

4.1 有限点的情况

在一些理论或实际问题中，经常会遇到一些函数，它在某个点 $z=z_0$ 的邻域中除去 $z=z_0$ 以外处处解析. 这种点在计算积分及计算闭路内解析函数的零点的个数等问题时是非常有用的.

定义 1　设函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处不可微（或无定义），但在这个点的某一个邻域（除去这个点以外）$S(z_0)$：$0<|z-z_0|<r$ 上是解析的，则称 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点.

【例 1】　函数 $\dfrac{\sin z}{z}$、$\dfrac{1}{z^2}$、$e^{\frac{1}{z}}$ 都以 $z=0$ 为其孤立奇点.

求证：

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1; \tag{1}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z^2}=\infty; \tag{2}$$

$$\lim_{z\to 0}e^{\frac{1}{z}}\ \text{不存在}. \tag{3}$$

解：由第二节例5知道，对任意的 z，有下式成立：

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

因而有

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (z \neq 0). \tag{4}$$

等式(4)右边的级数显然在全平面收敛，因此它表示一个全平面上的解析函数 $g(z)$，显然有

$$\lim_{z \to 0} g(z) = g(0) = 1,$$

因而
$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} g(z) = 1.$$

极限关系式(2)是显然成立的.

考虑(3)，显然有

$$\lim_{z = x \to +0} e^{\frac{1}{z}} = +\infty, \quad \lim_{z = x \to -0} e^{\frac{1}{z}} = 0,$$

因此不存在极限 $\lim\limits_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}$.

我们再考察这三个函数在 $z=0$ 处的罗朗展开式. $\frac{\sin z}{z}$ 的罗朗展开式就是(4)，它不含有负幂项；$\frac{1}{z^2}$ 在 $z=0$ 处的罗朗展开式就是它自己，它只含有有限个负幂；而 $e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 处的罗朗展开式为

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots.$$

它含有无穷多个负幂项.

三个函数在 $z=0$ 处的三种极限状态正好对应着三个不同类型的罗朗展开式. 我们在下面要指出：这个现象不是偶然的.

1) 可去奇点　设函数 $f(z)$ 以 $z=z_0$ 为孤立奇点，且

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \quad 存在. \tag{5}$$

则称 $z=z_0$ 为函数 $f(z)$ 的可去奇点．关于可去奇点，有下述定理：

定理 1　使 $z=z_0$ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点的充要条件是：在 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 的罗朗展开式（见第三节公式(3)）中，全部负幂项的系数都为零，即

$$a_{-n}=0 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

【证】　充分性：在定理的条件下，有

$$f(z)=\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

其中幂级数就在某个圆 $|z-z_0|<r$ 内收敛，因此 $\varphi(z)$ 是圆 $|z-z_0|<r$ 内的解析函数．因而

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=\varphi(z_0)=a_0.$$

必要性：设

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=l,$$

则任给 $\varepsilon>0$，存在数 δ，使当 $0<|z-z_0|<\delta\ (\delta<r)$ 时，就有

$$|f(z)-l|<\varepsilon.$$

由此得到

$$|f(z)|\leqslant l+\varepsilon \triangleq M.$$

这表示函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 中是有界的．

利用第三节中的系数公式(4)，当 $n=1,\ 2,\ \cdots$ 时，

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)(z-z_0)^{n-1}dz,$$

其中 Γ 为任意一个圆周：$|z-z_0|=\rho<\delta$．由此从上式利用积分的性质，就可以得到

$$|a_{-n}|\leqslant\frac{1}{2\pi}M\rho^{n-1}2\pi\rho=M\rho^n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

令$\rho\to0$，就得到$a_{-n}=0\quad(n=1,2,\cdots)$. ▌

从上面定理的证明过程中，容易看出下述定理也成立：

定理2 使$z=z_0$为函数$f(z)$的可去奇点的充要条件是：函数$f(z)$在$z=z_0$的某个除去$z=z_0$的邻域中是有界的.

【例2】 考虑函数

$$F(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z}, & z\neq0;\\ 2, & z=0.\end{cases}$$

这个函数以$z=0$为它的孤立奇点. 由于极限关系(1)，根据定理1知，$z=0$是它的可去奇点. 如果我们定义一个函数为

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z}, & z\neq0;\\ \lim\limits_{z\to0}\dfrac{\sin z}{z}=1, & z=0.\end{cases}$$

则这个函数在全平面上就处处等于由(4)式中的级数所确定的全平面上的解析函数了. 所以，当函数$f(z)$在$z=z_0$处或者没有定义，或者定义得"不好"，但当$z=z_0$是它的可去奇点时，只要我们重新构造一个函数$g(z)$，使它在$z=z_0$处取$f(z)$的极限值，而在其他地方与$f(z)$完全相等. 这样的函数$g(z)$就在$z=z_0$解析了，这表示已将奇点去掉了，因此称$z=z_0$是可去奇点.

2）**极点** 设函数$f(z)$以$z=z_0$为孤立奇点，若

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty,\tag{6}$$

则称z_0是函数$f(z)$的极点. 在很多问题中，经常会遇到极点. 关于极点，有下述定理：

定理3 使$z=z_0$是函数$f(z)$的极点的充要条件是：在$f(z)$在$z=z_0$的罗朗展开式（见第三节公式(3)）中，负幂项的

系数 $a_{-n}(n=1, 2, \cdots)$不全等于零，但不等于零的 a_{-n} 只有有限个。

【证】 充分性：设 $f(z)$ 的展开式（见第三节公式(3)）中负幂项的系数 $a_{-n}(n=1, 2, \cdots)$不全为零，且只有有穷个不为零，则

$$f(z)=\varphi(z)+\psi(z), \tag{7}$$

其中 $$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

在 $z=z_0$ 的邻域中解析，而

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{m} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} \quad (a_{-m}\neq 0). \tag{8}$$

现在证明 $$\lim_{z\to z_0}\psi(z)=\infty.$$

事实上，

$$\psi(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\left[a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{m-1}\right]$$
$$=\frac{1}{(z-z_0)^m}\psi_1(z),$$

由此得到 $$\lim_{z\to z_0}\psi(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(z-z_0)^m}\psi_1(z)=\infty.$$

因而从(7)得到

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}(\varphi(z)+\psi(z))=\infty.$$

其中最后一个等式是用到

$$\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=\varphi(z_0),$$

根据极点的定义即得证。

必要性：根据定理的条件，由极点定义中的(6)式知，必存在一个圆环 $0<|z-z_0|<\delta(\delta<r)$，使得在此环内有

$$|f(z)|\geqslant 1.$$

考虑函数 $g(z)=\frac{1}{f(z)}$，它就在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，且因为

$$\lim_{z\to z_0} g(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0,$$

所以 $z=z_0$ 是 $g(z)$ 的可去奇点. 我们定义 $g(z)$ 在 $z=z_0$ 的值就是零. 因此，从 $g(z)$ 的罗朗展开式中可以看出，它没有负幂项，即

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad 0<|z-z_0|<\delta. \tag{9}$$

而幂级数所表示的函数是圆 $|z-z_0|<\delta$ 的解析函数，因此

$$\lim_{z\to z_0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=\lim_{z\to z_0} g(z)=0,$$

即 $a_0=0$，这样一来，等式两边的函数在 $z=0$ 处也相等，因此 $g(z)$ 就在圆 $|z-z_0|<\delta$ 内解析了.

根据 $g(z_0)=0$ 的定义，设 $z=z_0$ 是 $g(z)$ 的 m 级零点，从而有

$$\begin{aligned}g(z)&=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots\\&=(z-z_0)^m[a_m+a_{m+1}(z-z_0)+a_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots]\\&=(z-z_0)^m g_1(z)\quad (a_m\neq 0).\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $g_1(z)$ 就是 $|z-z_0|<\delta$ 中的解析函数，且 $g_1(z_0)=a_m\neq 0$. 用 ε-δ 的语言及上面用过的方法可以证明，必存在一个圆 $|z-z_0|<\delta_1\leqslant\delta$，$g_1(z)$ 在此圆内不等于零. 因而有

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\frac{1}{g_1(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}M(z),$$

$$0<|z-z_0|<\delta_1. \tag{11}$$

其中 $M(z)=\frac{1}{g_1(z)}$，它就是 $|z-z_0|<\delta_1$ 中的解析函数，且

$$M(z_0)=\frac{1}{g_1(z_0)}\neq 0.$$

将 $M(z)$ 展开为 $z=z_0$ 处的幂级数，得

$$M(z)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(z-z_0)^n,\quad d_0=M(z_0)\neq 0.\qquad(12)$$

将(12)代入(11)以后就得到函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处的罗朗展开式

$$f(z)=\frac{d_0}{(z-z_0)^m}+\frac{d_1}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots$$
$$+d_m+d_{m+1}(z-z_0)+\cdots\quad(d_0\neq 0).\qquad(13)$$

由(12)就看出，$f(z)$ 的罗朗展开式中的负幂项系数不全为零，且不为零的仅有有限个. ▌

定义 2 若函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处的罗朗展开式为

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots,$$

且 $a_{-m}\neq 0$，则称 $f(z)$ 以 $z=z_0$ 为 m 级极点.

定理 4 使 $z=z_0$ 为函数 $f(z)$ 的 m 级极点的充要条件是：函数 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 在补上 $z=z_0$ 时 $g(z)=0$ $(g(z_0)=0)$ 以后，在 $z=z_0$ 处解析，且以 $z=z_0$ 为 m 级零点.

必要性可从上面的定理证明过程中并注意等式(10)看出来. 充分性的证明也与上面定理中充分性的证明方法类似，留给读者自己证明.

【例 3】 函数 $\operatorname{sh}z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$ 以 $z=0$ 为几级零点？函数 $\dfrac{1}{\operatorname{sh}z}$ 以 $z=0$ 为几级极点？

解：显然 $\operatorname{sh}0=\dfrac{1-1}{2}=0$，

且 $$(\operatorname{sh} z)'|_{z=0}=\frac{e^z+e^{-z}}{2}\bigg|_{z=0}=1.$$
因此 $\operatorname{sh} z$ 以 $z=0$ 为一级零点．根据上面的定理 4，$z=0$ 就是 $\frac{1}{\operatorname{sh} z}$ 的一级极点．

【例 4】 函数 $\sec^2 z$ 以 $z=\pm\frac{\pi}{2}+k\pi$（k 是整数）为几级极点？

解：考虑函数 $\cos^2 z$，显然

$$\cos^2\left(\pm\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0,$$

且 $$(\cos^2 z)'|_{z=\pm\frac{\pi}{2}+k\pi}=-2\sin z\cdot\cos z|_{z=\pm\frac{\pi}{2}+k\pi}=0,$$

$$(\cos^2 z)''|_{z=\pm\frac{\pi}{2}+k\pi}=-(\sin 2z)'|_{z=\pm\frac{\pi}{2}+k\pi}$$

$$=-\cos(\pm\pi+2k\pi)=\mp 1\neq 0.$$

因此 $\cos^2 z$ 以 $z=0$ 为二级零点．根据上面的定理 4，$z=0$ 就是 $\frac{1}{\cos^2 z}=\sec^2 z$ 的二级极点．

3）本性奇点　设函数 $f(z)$ 以 $z=z_0$ 为它的孤立奇点，且

$$\lim_{z\to z_0} f(z)\text{不存在},$$

则称 z_0 是函数 $f(z)$ 的本性奇点．关于本性奇点，有如下定理：

定理 5　使 $z=z_0$ 是函数 $f(z)$ 的本性奇点的充要条件是：在 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 的罗朗展开式中，负幂项的系数 a_{-n}（$n=1, 2, \cdots$）中有无穷多个不为零．

【证】 必要性：假设结论不对．那么负幂项的系数就只有有限个不为零，从定理 1 及定理 3 知，$z=z_0$ 或是 $f(z)$ 的可去奇点，或是 $f(z)$ 的极点，即：或者 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在，或者 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

$\to\infty$，这与本性奇点的定义相矛盾.

充分性：若结论不对，即 $z=z_0$ 不是 $f(z)$ 的本性奇点，那么只可能是另外两种情况：$z=z_0$ 或是可去奇点，或是极点. 从定理 1 及定理 3 知道，在这两种情况下，负幂项的系数至多有有限个不为零. 这与充分性的假定相矛盾. 定理得证. ∎

函数在本性奇点附近的性质是很复杂的.

定理 6 设 $z=z_0$ 为函数 $f(z)$ 的本性奇点，则对于任一复数 w_0 及任意的 $\varepsilon>0$、任意 $r>0$，在区域 $0<|z-z_0|<r$ 中必存在一个点 z^*，使得

$$|f(z^*)-w_0|<\varepsilon.$$

这定理称为魏尔斯特拉斯(Weierstrass)定理. 由这定理推出：在任意一个圆环 $0<|z-z_0|<r$ 中，必存在序列 $\{z_n\}$，使

$$\lim_{z_n\to z_0} f(z)=w_0. \tag{14}$$

【证】 用反证法：假设定理的结论不对，那么就存在一个复数 w_1、正数 $\varepsilon_0>0$ 及一个区域 $0<|z-z_0|<\delta_2$，使得对此区域中的任何点 z，有下式成立：

$$|f(z)-w_1|\geqslant\varepsilon_0. \tag{15}$$

构造函数

$$G(z)=\frac{1}{f(z)-w_1}, \tag{16}$$

由于不等式 (15)，函数 $G(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta_2$ 上解析，且 $|G(z)|\leqslant\frac{1}{\varepsilon_0}$，根据本节定理 2 推知：$z=z_0$ 为 $G(z)$ 的可去奇点. 令

$$G(z_0)=\lim_{z\to z_0} G(z),$$

上面已经讨论过，此时函数 $G(z)$ 就是 $|z-z_0|<\delta_2$ 内的解析函数. 故它可以在圆 $|z-z_0|<\delta_2$ 内展开为幂级数

$$G(z)=(z-z_0)^m(a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots)$$
$$=(z-z_0)^m\lambda(z)\quad(m\geqslant 0).$$

其中 $\qquad a_m\neq 0,\ \lambda(z)=a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots$

也是 $|z-z_0|<\delta_2$ 中的解析函数，且 $\lambda(z_0)=a_m\neq 0$.

现在分两种情况讨论：① $m=0$，即 $G(z_0)=\lambda(z_0)\neq 0$，则 $\frac{1}{G(z)}=f(z)-w_1$ 就在 $z=z_0$ 处解析．这与 $z=z_0$ 是函数 $f(z)$ 的本性奇点的假设相矛盾；② 若 $m>0$，则由定理 4，$\frac{1}{G(z)}=f(z)-w_1$ 就以 $z=z_0$ 为 m 级极点，这也与 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点的假设相矛盾．因此在任何情况下都导致矛盾，这就证明了定理．】

这定理说明了函数 $f(z)$ 在本性奇点附近的性质是很复杂的，$f(z)$ 在本性奇点的邻域中所取的值可以任意地接近任何一个复数．1879 年，毕卡(Picard)还证明了：至多除了一个值以外，函数在本性奇点的邻域中可以无穷多次地取得任何一个复数．近代，在这个方面还有许多深刻的研究，这些都是属于函数的值分布理论的范围，这里就不深入讨论了．

4.2 无穷远点的情况

设函数 $f(z)$ 在无穷远点邻域 $r<|z|<+\infty$ 中解析．作变换 $\zeta=\frac{1}{z}$，令 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=F(\zeta)$．由于 $z=\infty$ 对应着 $\zeta=0$，而

$$F(\zeta)=\Phi(\zeta)+\psi(\zeta),$$

其中

$$\psi(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\zeta^n},\qquad \Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{-n}\zeta^n. \tag{17}$$

而

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n=\sum_{n=-\infty}^{0}a_nz^n+\sum_{n=1}^{+\infty}a_nz^n. \tag{18}$$

由此看出：函数$f(z)$的展开式中正幂项的系数$a_n(n=1,2,\cdots)$就是函数$F(\zeta)$中负幂项的系数. 这样，对照有限点的情况，我们可以研究函数在无穷远处的孤立奇点的分类.

1) 可去奇点　设函数$f(z)$在$r<|z|<+\infty$内解析，且

$$\lim_{z\to\infty} f(z) \quad 存在,$$

则称$z=\infty$是函数$f(z)$的可去奇点. 关于这种可去奇点，有下述定理：

定理7　使$z=\infty$是函数$f(z)$的可去奇点的充要条件是：展开式(18)中的正幂项的系数全为零，即$a_n=0$ $(n=1, 2, \cdots)$.

【证】　考虑函数$F(\zeta)=f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$. 容易看出：函数$f(z)$以$z=\infty$为可去奇点的充要条件是$F(\zeta)$以$\zeta=0$为可去奇点. 根据定理1，$F(\zeta)$以$\zeta=0$为可去奇点的充要条件是$f(\zeta)$在$\zeta=0$处的展开式(17)中，全部负幂项的系数都为零，即$a_n=0$ $(n=1, 2, \cdots)$. 】

类似于定理2，有

定理8　使$z=\infty$为函数$f(z)$的可去奇点的充要条件是：$f(z)$在$z=\infty$的邻域中有界.

定义3　设$z=\infty$是函数$f(z)$的可去奇点. 若函数$f(z)$在$z=\infty$的邻域内的罗朗展开式(18)中的系数满足

$$a_{-n}=0 \quad (n=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1),\ a_{-m}\neq 0.$$

则称$z=\infty$是函数$f(z)$的m级零点.

【例5】　$z=\infty$为函数$f(z)=\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z^3}$的二级零点.

2) 极点　设函数$f(z)$在$r<|z|<+\infty$中解析，且

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty,$$

则称 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的极点.

定理 9 使 $z=\infty$ 为函数 $f(z)$ 的极点的充要条件是：它在 $z=\infty$ 的邻域内的罗朗展开式(18)中正幂项的系数 a_n $(n=1, 2, \cdots)$ 不全为零，但只有有限多个不为零.

【证】 考虑函数 $F(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. 容易看出，函数 $f(z)$ 以 $z=\infty$ 为极点的充要条件是 $F(\zeta)$ 以 $\zeta=0$ 为极点. 根据定理 3，函数 $F(\zeta)$ 以 $\zeta=0$ 为极点的充要条件是展开式(17)中的负幂项系数 a_n $(n=1, 2, \cdots)$ 不全为零，但只有有限个不为零.】

定义 4 设 $z=\infty$ 为函数 $f(z)$ 的极点. 若函数 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域中的罗朗展开式(18)的系数满足

$$a_m \neq 0,\ a_n=0 \quad (n=m+1,\ m+2,\ \cdots),$$

则称 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的 m 级极点.

定理 10 $z=\infty$ 为函数 $f(z)$ 的 m 级极点的充要条件是：函数 $\frac{1}{f(z)}$ 以 $z=\infty$ 为 m 级零点.

【证】 考虑函数 $F(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. 容易看出，函数 $f(z)$ 以 $z=\infty$ 为其 m 级极点的充要条件是：函数 $F(\zeta)$ 以 $\zeta=0$ 为其 m 级极点. 根据定理 4，函数 $F(\zeta)$ 以 $\zeta=0$ 为 m 级极点的充要条件是：函数 $\frac{1}{F(\zeta)}$ 以 $\zeta=0$ 为 m 级零点，而这等价于函数 $\frac{1}{F\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{f(z)}$ 以 $z=\infty$ 为其 m 级零点.】

3) 本性奇点 设函数 $f(z)$ 在 $r<|z|<+\infty$ 内解析，且

$$\lim_{z\to\infty} f(z) \quad 不存在,$$

则称 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的本性奇点.

定理 11 使$z=\infty$是函数$f(z)$的本性奇点的充要条件是：它在$z=\infty$的邻域内的罗朗展开式(18)中的正幂项系数$a_n(n=1, 2, \cdots)$有无穷多个不为零.

【证】 因为$f(z)$以$z=\infty$为其孤立奇点，而孤立奇点只可能有可去奇点、极点及本性奇点三类. 根据定理 7 及定理 9，前两类所对应的在$z=\infty$邻域内的罗朗展开式(18)中，至多只有有穷多个正幂项，因此后一种情况必然对应着展开式(18)中有无穷多个正幂项. 】

习 题 4·4

1. 下列函数在所示各点是哪一类奇点? 若是极点，则求出其级.

   (1) $e^{\frac{1}{z}}$, $z=0$; (2) $\dfrac{1}{\sin z-\cos z}$, $z=\dfrac{\pi}{4}$;

   (3) $\sin\dfrac{1}{1-z}$, $z=1$ 及 $z=\infty$;

   (4) $\dfrac{1}{\cos z}$, $z=\infty$; (5) $e^z\ln\dfrac{z-a}{z-b}$, $z=\infty$、a、b.

2. 下列各函数有哪些奇点? 是什么类型的奇点?

   (1) $\operatorname{ctg} z$; (2) $\ln\dfrac{z-1}{z-2}$;

   (3) $\dfrac{1}{\sin z+\cos z}$; (4) $e^{\frac{1}{z-1}}\cdot\dfrac{1}{e^z-1}$.

3. 设函数$f(z)=\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$. (1) 哪些点是函数$f(z)$的孤立奇点? 属于何种类型? (2) 求出函数$f(z)$在区域$0<|z|<1$及$|z|>1$中的罗朗展开式.

4. 证明本节定理 4 的充分性.

5. 试证：若函数$f(z)$在全平面解析，则(1) $z=\infty$为$f(z)$的可去奇点的充要条件为$f(z)\equiv$常数; (2) $z=\infty$为$f(z)$的m级极点的充要条件为$f(z)$是一个m次多项式; (3) $z=\infty$为$f(z)$的本性奇点的充要条件是：$f(z)$在$z=\infty$邻域的罗朗展开式中没有负幂项，但有无穷多个正幂项.

第五节　整函数与亚纯函数的概念与性质

5.1 整函数的概念与性质

定义 1　在全平面上解析的函数为*整函数*.

整函数是很广泛的一类函数. 按定义，多项式是整函数. e^z、$\cos z$、$\sin z$、$\operatorname{ch} z$、$\operatorname{sh} z$ 等也都是整函数.

根据本章第二节定理 1，任意一个整函数 $f(z)$ 可以在全平面上展开为幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{1}$$

且以 $z=\infty$ 为其孤立奇点. 这里可分为三种情况:

1) 系数 $c_n=0\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$，此时 $f(z)\equiv c_0$. 因此 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点.

2) 系数 c_n 不全为零，但至多只有有限个不为零. 设 c_m 是不为零的系数中对应足标最大者，$m\geqslant 1$，即 $c_m\neq 0$，但当 $m>n$ 时，$c_n=0$. 此时就有

$$f(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_mz^m,$$

它是一个 m 次多项式. 因此，$z=\infty$ 就是函数 $f(z)$ 的 *m 级极点*，它在 $z=\infty$ 处的主要部分(见本章第四节中的定义)为

$$c_1z+c_2z^2+\cdots+c_mz^m.$$

3) 系数 c_n 中有无穷多个不为零. 此时，整函数 $f(z)$ 称为*超越整函数*. 而 $z=\infty$ 是它的*本性奇点*. 如函数

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

就是超越整函数.

也可以从 $z\to\infty$ 时函数 $f(z)$ 的模的增长情况来区别这三

类函数．这有下列定理：

定理1 整函数$f(z)$恒为常数的充要条件是：$f(z)$在全平面上有界．

【证】 必要性是显然的．充分性利用刘维尔定理就可证得(见第三章第四节定理6)．】

定理2 整函数是多项式的充要条件是：存在一串圆周K_m: $|z|=R_m\uparrow+\infty$，使得

$$|f(z)|\leqslant c|z|^u,\quad z\in K_m,\tag{2}$$

其中c与u都是常数．此外，在条件(2)下，函数$f(z)$是次数不超过$[u]$的多项式．

【证】 必要性：设$f(z)$是m次多项式

$$\begin{aligned}f(z)&=c_0+c_1z+\cdots+c_mz^m\\&=z^m\left(c_m+\frac{c_{m-1}}{z}+\cdots+\frac{c_0}{z^m}\right),\quad c_m\neq0.\end{aligned}\tag{3}$$

上面等式(3)括弧中的函数，当$z\to\infty$时，趋向于$c_m\neq0$．因此，存在数R，当$|z|\geqslant R$时，就有

$$\left|c_m+\frac{c_{m-1}}{z}+\cdots+\frac{c_0}{z^m}\right|\leqslant2|c_m|.$$

这样，从等式(3)就得到

$$|f(z)|\leqslant2|c_m||z|^m,\quad |z|\geqslant R.$$

这就证明了不等式(2)，其中$u=m$．

充分性：设估计式(2)成立．利用本章第二节中的柯西不等式，在函数$f(z)$的展开式(1)中，其系数c_n有估计

$$|c_n|\leqslant\frac{M(R)}{R^n},\ M(R)=\max_{|z|=R}|f(z)|.\tag{4}$$

将不等式(2)代入(4)，就得到

$$|c_n|\leqslant c\frac{R_m^u}{R_m^n}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

因此当 $n>[u]$ 时，令 $R_m\to+\infty$，就得到了 $c_n=0$. 这样，从函数 $f(z)$ 的展开式(1)即推出，它至多是一个 $[u]$ 次多项式. 】

我们从本章第二节中的施瓦兹公式知道，一个解析函数完全可以由它的实部决定并表示出来. 因此可以设想：当解析函数的实部有类似于定理 1 或定理 2 的条件时，也应该有同样的结论. 为此先证明下面一个定理：

定理 8 设函数 $f(z)=u(r,\ \theta)+iv(r,\ \theta)$, $z=re^{i\theta}$, 在 $|z|<R$ 内解析. 且对某个 $r<R$, 满足

$$u(r,\ \theta)\leqslant U, \quad \theta\in[0,\ 2\pi]. \tag{5}$$

则在函数 $f(z)$ 的泰勒展开式(1)中的系数 c_n 满足

$$|c_n|\leqslant\frac{2(U-\alpha_0)}{r^n} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots). \tag{6}$$

其中

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\ \theta)d\theta. \tag{7}$$

不等式(6)是柯西不等式的类似.

【证】 考虑函数 $U-f(z)=U-u(r,\ \theta)-iv(r,\ \theta)$ 的泰勒展开式

$$U-f(z)=U-c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n,$$

其中

$$\begin{aligned}-c_n&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{U-f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}[U-u(r,\ \theta)-iv(r,\ \theta)]e^{-in\theta}d\theta.\end{aligned} \quad (8$$

另一方面，由柯西定理，当 $n\geqslant1$ 时，就有

$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}[U-f(\zeta)]\zeta^{n-1}d\zeta\\&=\frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}[U-u(r,\ \theta)-iv(r,\ \theta)]e^{in\theta}d\theta.\end{aligned}$$

将上式两边取共轭后再除以 r^{2n}，就得到

$$0=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}[U-u(r,\ \theta)+iv(r,\ \theta)]e^{-in\theta}d\theta. \qquad (9)$$

将(8)与(9)相加，就可以消去 $v(r,\ \theta)$，得到

$$-c_n=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}[U-u(r,\ \theta)]e^{-in\theta}d\theta.$$

因而，再利用条件(6)，就得到

$$\begin{aligned}|c_n|&\leqslant\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}|U-u(r,\ \theta)|d\theta\\&=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}[U-u(r,\ \theta)]d\theta\\&=\frac{2U}{r^n}-\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}u(r,\ \theta)d\theta\\&=\frac{2U}{r^n}-\frac{2}{r^n}\alpha_0=\frac{2(U-\alpha_0)}{r^n}.\end{aligned}$$

其中用到了公式(7)．▌

定理4 设函数 $f(z)=u(r,\ \theta)+iv(r,\ \theta)\ (z=e^{i\theta})$ 是整函数，则

1) 若存在一串 $r_m\uparrow+\infty$ 及常数 U，使得

$$u(r_m,\ \theta)\leqslant U\quad(0\leqslant\theta\leqslant2\pi). \qquad (10)$$

则 $f(z)\equiv$常数．

2) 若存在一串 $r_m\uparrow+\infty$ 及正常数 c、u，使得

$$u(r_m,\ \theta)\leqslant cr_m^u\quad(0\leqslant\theta\leqslant2\pi). \qquad (11)$$

则 $f(z)$ 至多是一个 $[u]$ 次多项式．

【证】 先证1)：由条件(10)，根据定理3，函数 $f(z)$ 的泰勒展开式(1)中的系数 c_n 满足

$$|c_n|\leqslant\frac{2(U-\alpha_0)}{r_m^n}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

令 $r_m\to+\infty$，就得到了 $c_n=0(n=1,\ 2,\ \cdots)$．因此 $f(z)\equiv c_0$，

次证 2)：由条件(11)，同样根据定理 3，函数 $f(z)$ 的泰勒展开式(1)中的系数 c_n 满足

$$|c_n| \leqslant \frac{2(cr_m^u - \alpha_0)}{r_m^n} \quad (n=1, 2, \cdots).$$

由此推出，当 $n>[u]$ 时，令 $r_m \to +\infty$，就得到 $c_n=0$. 因而 $f(z)$ 至多是一个 $[u]$ 次多项式. 】

设

$$M(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|, \tag{12}$$

由最大模原理知道，$M(R)$ 是一个单调上升函数(见第三章习题 5.3 第 2 题). 用函数 $M(R)$ 可以刻划函数 $f(z)$ 当 $z\to\infty$ 时的增长性. 这有下面定理：

定理 5 整函数 $f(z)$ 为超越整函数的充要条件是：

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{M(R)}{\ln R} = +\infty. \tag{13}$$

【证】 必要性 用反证：若(13)不成立，即 $\varliminf\limits_{R\to+\infty} \dfrac{\ln M(R)}{\ln R} = \alpha < +\infty$，则从下极限的定义知(见第四章第一节)：任给 $\varepsilon>0$，存在一串 $R_m \uparrow +\infty$，使得 R_m 充分大时，有 $\dfrac{\ln M(R_m)}{\ln R_m} < \alpha + \varepsilon$，即

$$M(R_m) \leqslant R_m^{\alpha+\varepsilon}.$$

这就满足了定理 2 中的条件——不等式(2)，其中 $u=\alpha+\varepsilon$. 应用定理 2 即推出：函数 $f(z)$ 是一个次数至多为 $[\alpha+\varepsilon]$ 的多项式. 这与它是超越整函数的假设相矛盾.

充分性 用反证：若函数不是超越整函数，则它必是一个多项式，设其次数为 m. 从证明定理 2 的必要性部分看出，存在数 c 与 R，当 $|z|\geqslant R$ 时，有 $|f(z)|\leqslant c|z|^m$，即

$$M(R) \leqslant cR^m.$$

由此推出 $$\overline{\lim_{R\to+\infty}}\frac{\ln M(R)}{\ln R}\leqslant m.$$

这就与条件——等式(13)相矛盾. 因此$f(z)$必是超越整函数. 】

5.2 亚纯函数的概念与性质

定义 2 设函数$f(z)$在区域D内除了极点外都解析, 则称它是区域D内的亚纯函数; 若$f(z)$在全平面上除了极点外都解析, 则称它是全平面上的亚纯函数, 简称亚纯函数.

显然, 所有的有理函数都是亚纯函数, 它们在全平面上只有有限个极点. 从有理函数的分子——n次多项式及分母——m次多项式可以看出: 若$n>m$, 则$z=\infty$是这个有理函数的$n-m$级极点; 若$n\leqslant m$, 则$z=\infty$是它的$m-n$级零点.

亚纯函数的例子是很多的. 在大量理论与实际问题中所遇到的亚纯函数为非有理函数的亚纯函数.

【例 1】 $\operatorname{ctg} z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$是亚纯函数.

解: 因为$\sin z$有一级零点$z=k\pi$(k是整数), 且分子$\cos z$在这些点上取值不为零, 由此根据本章第四节中讲到的零点与极点的关系定理 4 知道: $\operatorname{ctg} z=\cos z\dfrac{1}{\sin z}$也以$z=k\pi$为其一级极点. 因此$\operatorname{ctg} z$是亚纯函数.

【例 2】 $\dfrac{z}{e^z-1}$是亚纯函数, 其极点为$z=2k\pi i$($k\neq 0$整数).

解: 容易证明e^z-1以$z=2k\pi i$为一级零点(k是整数). 事实上, 这由于$(e^z-1)'|_{z=2k\pi i}=e^z|_{z=2k\pi i}=1\neq 0$而得到. 因

此，同样根据本章第四节定理 4 知道：函数 $\frac{z}{e^z-1}$ 以 $z=2k\pi i$ 为一级极点，其中 $k\neq 0$. 当 $k=0$ 时，即 $z=0$，由于分子也以 $z=0$ 为一级零点，因此 $z=0$ 是 $\frac{z}{e^z-1}$ 的可去奇点，我们就可以认为它在 $z=0$ 解析. 因此 $\frac{z}{e^z-1}$ 是亚纯函数，其极点在 $z=2k\pi i$ ($k\neq 0$ 整数).

这两个例子中的亚纯函数都有无穷多个极点，且 $z=\infty$ 是极点的极限点，因此 $z=\infty$ 不是孤立奇点. 如果一个亚纯函数 $f(z)$ 在全平面上有无穷多个极点，则这些极点只可能以 $z=\infty$ 为凝聚点. 事实上，在相反的情况下，若有一个凝聚点 $a\neq\infty$，则 $z=a$ 就是极限的极限点，因此不是孤立奇点. 这与亚纯函数的定义相矛盾. 如果亚纯函数在全平面上只有有穷多个极点，且 $z=\infty$ 也是极点或可去奇点，则有下面的定理：

定理 6 若亚纯函数 $f(z)$ 在扩充平面上除了极点以外都解析，则它必是有理函数.

【证】 根据上面的分析，亚纯函数在平面上只有有限个极点 b_i，其级为 m_i ($i=1, 2, \cdots, s$). 设 $f(z)$ 在 $z=b_i$ 处的罗朗展开式中的主要部分为

$$\psi_i(z)=\sum_{n=1}^{m_i}\frac{a_{-n}^{(i)}}{(z-b_i)^n},\quad a_{-m_i}^{(i)}\neq 0\quad (i=1, 2, \cdots, s).\tag{14}$$

这样，函数 $f(z)-\psi_i(z)=\varphi_i(z)$ 就是 $f(z)$ 在 $z=b_i$ 处罗朗展开式中的解析部分. 若补充定义

$$\varphi_i(b_i)=\lim_{z\to b_i}[f(z)-\psi_i(z)]\quad (i=1, 2, \cdots, s),$$

则函数 $f(z)-\psi_i(z)=\varphi_i(z)$ 也就在 $z=b_i$ 处解析.

此外，由于定理的条件，$z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的极点或可去

奇点，因此 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 邻域中的罗朗展开式中的主要部分为多项式

$$\Phi_1(z)=\sum_{n=1}^{m}c_nz^n,$$

这样 $f(z)-\Phi_1(z)=\Psi_1(z)$ 是其解析部分，因此 $z=\infty$ 是 $\psi_1(z)$ 的可去奇点，显然 $\lim\limits_{z\to\infty}\Psi_1(z)$ 存在．此外，由(17)也知道

$$\lim_{z\to\infty}\psi_i(z)=0\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s).$$

现在考虑函数 $F(z)=f(z)-\sum\limits_{i=1}^{s}\psi_i(z)-\Phi_1(z)$．根据上面的讨论，它在全平面上解析，且

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\infty}F(z)&=\lim_{z\to\infty}f(z)-\sum_{i=1}^{s}\psi_i(z)-\Phi_1(z)\\&=\lim_{z\to\infty}\Psi_1(z)\quad\text{存在}.\end{aligned}$$

由此看出：$F(z)$ 是一个有界整函数．应用第三章中的刘维尔定理知：$F(z)\equiv$ 常数，因此

$$f(z)=\sum_{i=1}^{s}\psi_i(z)+\Phi_1(z)+C$$

就是一个有理函数．▌

习　题　4·5

1．设整函数 $f(z)$ 满足 $\operatorname{Re}f(z)>0$，求证 $f(z)\equiv$ 常数．

2．试用第二节中的施瓦兹公式证明定理3．

第四章小结

1．引进了复函数项级数的收敛、绝对收敛及一致收敛的概念；柯西准则；判别级数一致收敛的充分条件；一致收敛级

数的三个重要性质以及幂级数的概念及其性质．这些概念及性质与实函数中相应的概念及性质有很多类似之处，但是也有一定的差别．级数与积分一样也是研究解析函数的一个重要工具．

2．圆内的解析函数可以在此圆内展开为幂级数，即称泰勒级数展开式，且这个展开式是唯一的，这是解析函数的一个重要性质．在这个展开式中，其展开系数可以用展开函数的积分表示，由此利用导数的柯西不等式可以得到系数的估计式，即系数的柯西不等式，这个估计式与函数解析的圆的大小有密切的关系．

利用解析函数的幂级数展开式及幂级数的性质给出了解析函数另一个等价的定义．

给出了五个初等解析函数（$\sin z$, $\cos z$, e^z, $\ln(1+z)$, $(1+z)^a$ 等）在 $z=0$ 处的泰勒展开式．

3．利用解析函数的幂级数展开可以得到圆内调和函数被其对应的解析函数在圆周上的值进行积分表示的施瓦兹公式以及被其在圆周上的值进行积分表示的波阿松公式．此外还得到了解析函数的唯一性定理及零点的孤立性定理，这些也是解析函数所特有的性质．

4．给出了圆环内解析函数的罗朗展开式，在这个展开式中可以同时包有正幂项及负幂项，因此这是泰勒展开式的推广．

5．利用罗朗展开式，将解析函数的孤立奇点分成三类：可去奇点、极点及本性奇点．此外，无穷远点作为孤立奇点也可分为这三类．这些结果在研究解析函数在奇点附近的性质以及今后一些理论问题与定积分的计算中都有重要的应用．

6．整函数可以按其在无穷远点的罗朗展开式分成三类，

也可以由其在圆周上的模当半径趋向于无穷时的性态来分类. 亚纯函数在扩充平面上除了极点外，解析者必是有理函数，反之亦然.

第四章复习讨论题

1．试说明级数收敛、绝对收敛、一致收敛、内闭一致收敛等概念之间的异同. 能否对下列情况举出一例?

(1) 收敛但不绝对收敛; (2)收敛但不一致收敛; (3) 区域内闭一致收敛但不一致收敛; (4)绝对收敛但不收敛; (5)区域内一致收敛但不内闭一致收敛.

2．试就下列三种情况举例说明：幂级数在收敛圆周上的收敛性可以是多种多样的.

(1) 在收敛圆周上点点收敛; (2)在收敛圆周上点点发散; (3) 在收敛圆周上有点收敛，也有点发散.

3．幂级数的收敛性定理是怎样的? 它在研究幂级数的收敛性区域时起什么作用?

4．试直接证明幂级数在其收敛圆内可以逐项求导数.

5．设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的系数 $a_n>0$ 且单调下降并趋向于零. 试证:

(1) 它的收敛半径为 $R\geqslant 1$;

(2) 若 $R=1$，则在收敛圆周 $|z|=1$ 上，至多除去 $z=1$ 以外，在其他点上都收敛.

*6．试证明阿贝尔第二定理：若幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 在收敛圆周上的一点 $z=z^*$ 上收敛，其和为 l，则

$$\lim_{\substack{z\to z^*\\ \text{沿着半径}}} f(z)=\lim_{\substack{z\to z^*\\ \text{沿着半径}}}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n=l.$$

7．试述解析函数的 4 个等价的定义.

8．将解析函数展开为泰勒级数及罗朗级数的证明的关键是什么?

9．设函数 $f(z)$在单连通区域 D 内解析. 在 D 内是否存在一点，使得

函数 $f(z)$ 在此点展开为幂级数时，其收敛区域正好是区域 D?

10. 求下列函数在指定点处的奇点特性:

(1) $\cos\dfrac{1}{z}$, $z=0$;　　(2) $\sin\dfrac{1}{z}$, $z=\infty$;

(3) $\sec\dfrac{1}{z-1}$, $z=1$;　　(4) $\mathrm{ctg}\, z$, $z=\infty$;

(5) $\dfrac{z^2}{\sin\dfrac{1}{z}}$, $z=0$;　　(6) $\ln\dfrac{z-1}{z-2}$, $z=\infty$;

(7) $\sqrt{z(z-1)}$, $z=\infty$.

11. 求下列函数的全部不解析的点，它们是属于哪一种类型的奇点?

(1) $\dfrac{1}{z-z^3}$;　　(2) $\dfrac{z^4}{1+z^4}$;

(3) $\dfrac{z^2+1}{e^z}$;　　(4) ze^{-z};

(5) $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$;　　(6) $\mathrm{tg}\, z$;

(7) $\mathrm{ctg}\, z-\dfrac{1}{z}$;　　(8) $\dfrac{1}{z^2}\sin\dfrac{1}{z}$;

(9) $e^{-z}\cos\dfrac{1}{z}$;　　(10) $\sin\left(\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}\right)$.

12. 设函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 都以 $z=z_0$ 为其孤立奇点，问函数 $f_1(z)+f_2(z)$ 的孤立奇点有些什么类型?试分别举例说明之.

13. 试验证 e^z 及 $\sin z$ 具有魏尔斯特拉斯定理中所述的性质.

14. 若解析函数的零点不是孤立的，那么它是否一定是常数?

15. 什么叫做唯一性定理?试举例说明它的用处.

16. 试利用实变函数 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$ (α 为实数) 在原点的泰勒级数直接得到复变函数 e^z, $\sin z$, $\cos z$, $(1+z)^\alpha$ 在原点的泰勒级数.

17. 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<R_1$ 内解析. 试证: 对任意的 R, 有

$$\int_0^R\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|^2 r\,dr\,d\theta=\pi\sum_{n=1}^{+\infty}n|a_n|R^{2n},$$

其中 $$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n.$$

18. 求下列函数在 $z=0$ 的罗朗展开式中的三项正幂及三项负幂:

(1) $\frac{e^z}{e^z-1}$;　　　　(2) $\frac{z}{\sin z}$.

19. 解析函数的零点与极点是如何定义的? 它们与多项式中的根及有理函数中分母为零的点有什么关系?

20. 设函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 分别以 $z=0$ 为其 n 级极点及 m 级极点，问下列函数在 $z=0$ 处是什么奇点?

(1) $f_1(z)+f_2(z)$;　　　　(2) $f_1(z)\cdot f_2(z)$;

(3) $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$.

21. 什么叫孤立奇点?孤立奇点可分几类?试对每一类各举一例.

22. $z=0$ 是下列四个函数的什么性质的孤立奇点?

(1) $f_1(z)=\begin{cases}\sin z, & z\neq 0,\\ 1, & z=0;\end{cases}$　　(2) $f_2(z)=\begin{cases}\sin z, & z\neq 0,\\ \infty, & z=0;\end{cases}$

(3) $f_3(z)=\begin{cases}\sin z, & z\neq 0,\\ 0, & z=0;\end{cases}$　　(4) $f_4(z)=\begin{cases}\sin\frac{1}{z}, & z\neq 0,\\ 1, & z=0.\end{cases}$

23. 如何应用函数的罗朗展开式来对函数的孤立奇点进行分类?

24. 函数 $f_1(z)$ 以 $z=z_0$ 为本性奇点，$f_2(z)$ 以 $z=z_0$ 为孤立奇点，问 $z=z_0$ 是函数 $f_1(z)\cdot f_2(z)$ 的什么性质的奇点?

25. 直接应用函数 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处的罗朗展开式(18)来证明本章第四节的定理7、定理9、定理11.

26. 设 t 是参数,试证:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz^2+z^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}p_n(t)z^n,$$

其中 $p_n(t)$ 为 n 次多项式,且满足

$$(n+1)p_{n+1}(z)-(2n+1)zp_n(z)+np_{n-1}(z)=0.$$

[提示: 将 $\frac{1}{\sqrt{1-2tz^2+z^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}p_n(t)z^n$ 两边对 z 求导数后,两边乘上 $\sqrt{1-2tz^2+z^2}$,再比较两边的系数即得.]

27. 什么叫做整函数？它可以分成几类？每一类有哪些性质？

*28. 试证明，若函数 $F(z)$ 是整函数，且在全平面上没有零点，则存在一个整函数 $g(z)$，使得 $F(z)=e^{g(z)}$.

[提示：考虑函数 $h(z)=\int_0^z \frac{F'(z)}{F(z)}dz$ 及 $F_1(z)=e^{h(z)}$，证明 $\frac{d}{dz}\left(\frac{F_1(z)}{F(z)}\right)\equiv 0$ 即可.]

29. 设亚纯函数 $f(z)$ 的全部极点为 a_i $(1\leqslant i\leqslant m)$，且都不是整数. 设闭曲线序列为 $\{c_n\}$，后一个的内部包含前一个，且当 n 充分大时，可以包有任意的圆 $|z|\leqslant R$. 若

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{c_n} f(z)\operatorname{ctg}\pi z\,dz=0,$$

则

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)=-\pi\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=a_k}(f(z)\operatorname{ctg}\pi z).$$

30. 求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(a+n)^2}$ （a 不是整数）；

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

31. 在第 29 题的条件下，若

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{c_n}\frac{f(z)}{\sin\pi z}\,dz=0,$$

求证

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n f(n)=-\pi\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=a_k}\left(\frac{f(z)}{\sin\pi z}\right).$$

32. 求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(a+n)^2}$ （a 不是整数）；

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$；

(3) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n n\sin bn}{a^2-n^2}$ （$-\pi<b<\pi$，a 不是整数）.

第五章

留数理论及其应用

这一章中继续介绍复变函数积分的一些应用．这里要引进一个重要概念，即留数的概念，它与解析函数在孤立奇点处的罗朗展开式有密切的关系．应用留数的定理就可以比较容易地计算一些实函数中的积分．这些积分中的一部分，过去在实函数中用含参变量的积分法也计算过，但是计算比较复杂．这里将用统一的方法来处理．此外，应用留数定理，还可以计算区域内函数的零点及极点的个数．这些方法及结果在今后的一些理论问题及实际问题中也有重要的应用．

第一节　留数定理及留数的求法

1.1　留数的概念

定义 1　设函数 $f(z)$ 以 $z=z_0$ 为其孤立奇点，即函数 $f(z)$ 在某个圆环 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析．设 C 是任意一个圆周 $|z-z_0|=\rho<\delta$，则称积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz \tag{1}$$

为函数 $f(z)$ 在点 $z=z_0$ 处的留数，记作 $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$，或简单地记作 $\operatorname{Res} f(z_0)$ 或 $R(z_0)$．

我们从第三章中的柯西定理知道，用这样方法定义的留数值是唯一的，它不依赖于圆周 C 的半径．

设函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处的罗朗展开式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad 0<|z-z_0|<\delta.$$

则利用这个级数在圆环 $0<|z-z_0|<\delta$ 上内闭一致收敛的性质，特别地在 C 上一致收敛，就可以逐项积分，由此得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{2\pi i}\int_C (z-z_0)^n dz,$$

从第三章第二节的例 1 可知道，上面等式右边所有的积分，只有当 $n=-1$ 时才等于 $2\pi i$，而当 $n\neq -1$ 时，积分都为零. 由此得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=c_{-1}, \quad 即 \quad \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=c_{-1}. \tag{2}$$

这表示函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处的留数就是它在 $z=z_0$ 处罗朗展开式中负幂 $(z-z_0)^{-1}$ 的系数. 由此看出，若 $z=z_0$ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=0$.

定义 2 设函数 $f(z)$ 在无穷远点的邻域 $r<|z|<+\infty$ 中解析. 则定义函数 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处的留数为

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz,$$

其中积分是按顺时针方向沿圆周 Γ: $|z|=R>r$ 进行的，也就是在 Γ 上绕行一圈时，区域 $r<|z|<+\infty$ 总是保持在左方，简记为 $R(\infty)$.

同样，由第三章第二节中的柯西定理可知，$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ 是不依赖于圆周 Γ 中的半径 R. 此外，当函数 $f(z)$ 在 $r<|z|<+\infty$ 处展开为罗朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

后，同样利用逐项积分的方法，可以得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz = -c_{-1},$$

即

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}. \tag{3}$$

这里因为积分是按顺时针方向而取的，因此出现负号。但是与有限点的情况不同，当函数以 $z=\infty$ 为其可去奇点时，如 $f(z)=\dfrac{1}{z}$，其留数 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ 仍然也可能不等于零.

【例 1】 求 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 在 $z=0$ 及 $z=\infty$ 处的留数.

解：显然有

$$f(z)=\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\frac{z}{3!}+\cdots+\frac{z^{n-2}}{n!}+\cdots.$$

根据上面的公式(2)及(3)得到

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=1,\quad \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-1.$$

【例 2】 求 $\dfrac{\sin z}{z-\pi}$ 在 $z=\pi$ 处的留数.

解：显然

$$\frac{\sin z}{z-\pi}=\frac{\sin(\pi-z)}{z-\pi}=-\frac{\sin(z-\pi)}{z-\pi}$$

$$=-\frac{1}{z-\pi}\left((z-\pi)-\frac{(z-\pi)^3}{3!}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^n(z-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right)$$

$$=-1+\frac{(z-\pi)^2}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}(z-\pi)^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots.$$

因而

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi}\left(\frac{\sin z}{z-\pi}\right)=0.$$

1.2 留数定理

在很多问题中往往要计算函数在一个闭曲线上的积分．若在此闭曲线内部，函数除了一些孤立奇点以外是解析的，则可以将函数在闭曲线上的积分转化为计算这些孤立奇点上的留数．这有下列定理：

定理 1 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除了有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 以外解析．且设 C 是 D 内的闭曲线，其内部也属于 D，且含有全部 $z_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z). \tag{4}$$

【证】 利用第三章中的多连通区域中的柯西定理，以函数 $f(z)$ 的每一个孤立奇点 $z=z_j$ 为中心，作一个小圆 K_j，使得这些小圆都在 D 内，且互不相交．用 C_j 记作小圆 K_j 的边界（见图 5-1）．应用柯西定理得到

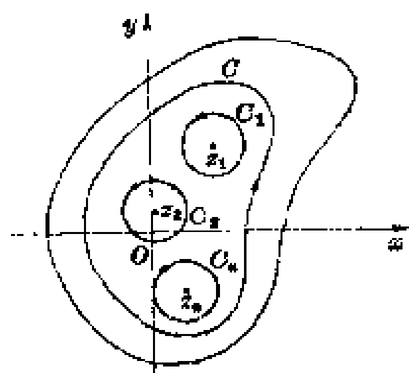


图 5-1

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_j} f(z)dz=\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z).$$

其中最后一个等式是根据留数的定义得到．定理证毕．∎

如果函数 $f(z)$ 在扩充平面上只有有限个孤立奇点，则有：

定理 2 设函数 $f(z)$ 在扩充平面上除了 $z=z_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$ 及 $z=\infty$ 外解析，则

$$\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0. \tag{5}$$

【证】 以原点为中心作大圆 $|z|<R$，使它的内部包有全

部的 $z=z_i\,(1\leqslant i\leqslant n)$. 则由定理 1 知道

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)dz=\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z).$$

另一方面，由定义 2 知道

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)dz=-\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z).$$

比较这两个等式就得到公式(5). ▌

在某些情况下，应用这个定理会起到简化计算的作用.

【例 3】 求

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=97}\frac{dz}{\prod\limits_{k=1}^{50}(z-2k)}.$$

解：由定理 1 知道

$$I=\sum_{k=1}^{48}\operatorname*{Res}_{z=2k} f(z),$$

$$f(z)=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{50}(z-2k)},\tag{6}$$

由此被积函数全部的孤立奇点为 $z=2k\,(1\leqslant k\leqslant 50)$ 以及 $z=\infty$, 由此应用定理 2, 得到

$$\sum_{k=1}^{50}\operatorname*{Res}_{z=2k} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0.\tag{7}$$

比较(6)与(7)就得到

$$I=-\operatorname*{Res}_{z=98} f(z)-\operatorname*{Res}_{z=100} f(z)-\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z).\tag{8}$$

显然，应用柯西公式得到：当 $\varepsilon<1$ 时，有

$$\operatorname*{Res}_{z=98} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-98|<\varepsilon}\frac{dz}{\prod_{k=1}^{50}(z-2k)}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-98|<\varepsilon}\frac{dz}{(z-98)(z-2)\cdots(z-96)(z-100)}$$

$$=\frac{1}{(98-2)(98-4)\cdots(98-96)(98-100)}$$

$$=\frac{-1}{2(96!!)}. \tag{9}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=100} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-100|<\varepsilon}\frac{dz}{\prod_{k=1}^{50}(z-2k)}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-100|<\varepsilon}\frac{dz}{(z-2)(z-4)\cdots(z-98)(z-100)}$$

$$=\frac{1}{(100-2)(100-4)\cdots(100-98)}=\frac{1}{98!!}. \tag{10}$$

此外，当 $|z|>100$ 时，有

$$f(z)=\frac{1}{z^{50}\prod_{k=1}^{50}\left(1-\frac{2k}{z}\right)}=\frac{1}{z^{50}}+\frac{91}{z^{51}}+\frac{92}{z^{52}}+\cdots,$$

因此

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0. \tag{11}$$

这样一来，将(9)、(10)及(11)代入(8)后，就得到

$$I=\frac{1}{96!!}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{98}\right)=\frac{24}{49}\cdot\frac{1}{96!!}.$$

1.3 留数的求法

留数定理把计算闭曲线上的积分值的问题转化为计算各个孤立奇点上函数的留数的问题，即计算在每一个孤立奇点处的罗朗展开式中负幂一次项的系数。但在一般情况下，这

种计算是比较繁的. 当孤立奇点是极点的时候, 可以通过导数来计算留数.

定理 3 设函数 $f(z)$ 以 $z=z_0$ 为 n 级极点, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}[(z-z_0)^n f(z)]}{dz^{n-1}}. \qquad (12)$$

【证】 根据本定理的条件, 由第四章第四节中的定义 1 知道, 函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处的罗朗展开式为

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$$
$$+c_k(z-z_0)^k+\cdots,$$

为了求 c_{-1}, 以 $(z-z_0)^n$ 乘上式两边, 得到

$$(z-z_0)^n f(z)=c_{-n}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{n-2}+c_{-1}(z-z_0)^{n-1}$$
$$+c_0(z-z_0)^n+\cdots+c_k(z-z_0)^{n+k}+\cdots,$$

右边的级数仍然在某个圆环 $0<|z-z_0|<\delta$ 中内闭一致收敛. 对上式求 $n-1$ 级导数, 利用第三章中逐项求导数的魏尔斯特拉斯第一定理, 得到

$$\frac{d^{n-1}[(z-z_0)^n f(z)]}{dz^{n-1}}=(n-1)!c_{-1}$$
$$+n(n-1)\cdots 2\cdot c_0(z-z_0)+\cdots$$
$$+(n+k)\cdots(2+k)c_k(z-z_0)^{k+1}+\cdots$$

仍在圆环 $0<|z-z_0|<\delta$ 中内闭一致收敛. 由于上式是一个幂级数, 因此它表示一个在 $|z-z_0|<\delta$ 内的解析函数, 特别地在 $z=z_0$ 处连续. 由此将上式两边取极限, 得到

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}[(z-z_0)^n f(z)]}{dz^{n-1}}=(n-1)!c_{-1}.$$

此即公式(12). 】

推论 1 当函数 $f(z)$ 以 $z=z_0$ 为一级极点时, 由(12)立刻得到

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z). \tag{13}$$

推论 2 当函数

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

其中函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 都在 $z=z_0$ 处解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$，$\psi(z)$ 以 $z=z_0$ 为一级零点，则

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{14}$$

事实上，由于 $\varphi(z_0)\neq 0$，因此函数 $\dfrac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ 在 $z=z_0$ 解析，且由条件知

$$\left(\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}\right)'\bigg|_{z=z_0}=\frac{\psi'(z_0)\varphi(z_0)-\psi(z_0)\varphi'(z_0)}{\varphi^2(z_0)}=\frac{\psi'(z_0)}{\varphi(z_0)}\neq 0.$$

因此 $z=z_0$ 是函数的一级零点. 根据第四章第四节定理 4，函数 $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 就以 $z=z_0$ 为一级极点. 从推论 1 知道

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)}{z-z_0}}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

【例 4】 求函数

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$$

在 $z=\pm1$ 处的留数. $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处的留数是什么?

解：由于 $z=1$ 是分母的一级零点，且分子不为零，因此，$z=1$ 是 $f(z)$ 的一级极点. 由(13)得

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}=\frac{1}{4};$$

由于 $z=-1$ 是分母的二级零点，且分子不为零，根据第四章第四节定理 4，容易看出，$z=-1$ 是函数 $f(z)$ 的二级极点．因此，由公式(12)，可以得到

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to -1}\frac{-1}{(z-1)^2}=\frac{-1}{4}.$$

最后，根据定理 2：

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)-\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0.$$

【例 5】 求函数

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}$$

在

$$z=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

处的留数，其中 k 为整数．

解：因为函数 $\cos z$ 以

$$z=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

为一级零点，而

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=(-1)^k\neq 0,$$

因此，$\operatorname{tg} z$ 以 $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 为一级极点．由公式(14)得

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} \operatorname{tg} z=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}{(\cos z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi}}=-1.$$

【例 6】 求函数

$$f(z)=\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$$

在 $z=1$ 及 $z=\infty$ 处的留数.

解：显然 $z=1$ 是分母的 n 级零点，因而它是函数 $f(z)$ 的 n 级极点. 由公式(12)得到

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-1)^n\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}\right]$$

$$=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}.$$

此外，由定理 2 得到

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}.$$

【例 7】 求函数

$$f(z)=\frac{e^z}{z^2-1}$$

在 $z=\infty$ 处的留数.

解：这个函数在扩充平面上只有三个孤立奇点：$z=1$、$z=-1$ 是一级极点，还有一个孤立奇点是 $z=\infty$. 由(13)得

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{e^z}{z^2-1}=\frac{e}{2};$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=\lim_{z\to-1}(z+1)\frac{e^z}{z^2-1}=-\frac{e^{-1}}{2}.$$

根据定理 2，得

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)-\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=\frac{e^{-1}-e}{2}.$$

习 题 5·1

1. 求下列函数在孤立奇点(并考虑 $z=\infty$)上的留数：

(1) $\frac{1}{1+z^4}$;　　(2) $\operatorname{ctg} z$;

(3) $\frac{1}{1-e^z}$;　　(4) $\frac{2}{(z-1)(z-2)^{100}}$;

(5) $\dfrac{2}{(z-z_1)^m(z-z_2)}$，其中 $z_1\neq z_2$，m 是正整数；

(6) $e^{\frac{1}{1-z}}$；　　(7) $\dfrac{1}{(e^z-1)^2}$；

(8) $\sin\dfrac{1}{z}$；　　(9) $\dfrac{1}{z(e^z-1)}$；

(10) $\dfrac{1}{\cos z-\sin z}$.

2. 设函数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析，$f(z_0)\neq 0$，$g(z)$ 在 $z=z_0$ 是二级零点. 则函数 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 在 $z=z_0$ 处的留数如何用 $f(z)$ 及 $g(z)$ 的泰勒级数中的系数表示出来？

第二节　利用解析函数的理论求定积分

在很多实际问题及理论研究中需要计算一些定积分，例如

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\quad（有阻尼的振动）；$$

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx,\quad \int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx\quad（光的折射）；$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx,\quad a>0\ （热传导）等等.$$

这些积分在微积分学中，利用参变量积分方法是可以求出来的，但是没有一个统一的处理方法，且必需验算一些条件才能应用微积分学中的一些法则，如积分号下求导数等. 还有一些积分（包括 Γ 函数之类的积分）用微积分学中的方法来计算是很困难的. 这一节介绍应用解析函数的理论可以统一地处理这些积分，并且不太困难地能将一些定积分计算出来.

1） 形如$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\ \sin\theta)d\theta$的积分计算

这里，$R(x,\ y)$是两个变量x与y的有理函数．这种形状的积分在微积分学中通过变换$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=u$就可以化为有理函数的积分，因此可以计算出来，但是计算量较大．这里我们作这样的变换——将它化为解析函数在闭曲线上的积分，这就可以应用留数定理求出其结果来．

令$z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，当$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$时，$|z|=1$，且使$z$按逆时针方向绕单位圆周$|z|=1$一周．已知

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}.$$

$$dz=ie^{i\theta}d\theta,$$

即

$$d\theta=\frac{dz}{iz}.$$

这样一来，

$$I=\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\ \sin\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{i}\int_{|z|=1} R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\ \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{dz}{z},\tag{1}$$

其中等式右边积分号下的被积函数

$$R_1(z)=R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\ \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{1}{z}$$

是一个有理函数．若原来的积分存在，则函数$R_1(z)$必在$|z|=1$解析，在$|z|<1$内只有有限个极点，设为$z_i(1\leqslant i\leqslant n)$，应用留数定理，就得到

$$I=2\pi\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_i}R_1(z)=2\pi\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_i}R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\ \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{1}{z}. \tag{2}$$

若每一个极点 z_i 的级为 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则由第一节公式(12)得到

$$I=2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\alpha_i-1)!}\lim_{z\to z_i}\frac{d^{\alpha_i-1}}{dz^{\alpha_i-1}}$$

$$\times\left[(z-z_i)^{\alpha_i}R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\ \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{1}{z}\right].$$

【例 1】 求

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\cos\theta},\ a\text{ 是实数},\ |a|<1.$$

解：令

$$z=e^{i\theta},$$

由(1)得到

$$I=\int_{|z|=1}\frac{1}{1+\frac{a}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{dz}{iz}=\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{az^2+2z+a}.$$

容易求出被积函数分母的零点为

$$z_1=-\frac{1}{a}+\sqrt{\frac{1}{a^2}-1},\quad z_2=-\frac{1}{a}-\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}.$$

且 $z_1z_2=1$. 由此看出 $|z_1|<1$，且它是被积函数的一级极点. 现在计算其留数

$$R(z_1)=\frac{1}{(az^2+2z+a)'}\bigg|_{z=z_1}=\frac{1}{2(az+1)}\bigg|_{z=z_1}$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}}.$$

根据留数定理，就得

$$I=\frac{2}{i}2\pi i R(z_1)=\frac{4\pi}{2a\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

【例 2】 求

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{a+b\cos x}dx,\qquad a>b>0.$$

解：若直接先用变换 $z=e^{ix}$，则区间 $[0,\ \pi]$ 只能变成 z 平面上的半个单位圆周，没有构成闭路，为此，利用被积函数是偶函数的性质，得到

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{a+b\cos x}dx.$$

令 $z=e^{ix}$，由公式(1)得到

$$I=\frac{1}{2}\int_{|z|=1}\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)^2\frac{1}{a+b\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)}\frac{dz}{iz}$$

$$=\frac{i}{4b}\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2\left(z^2+2\frac{a}{b}z+1\right)}dz$$

$$=\frac{i}{4b}\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-z_1)(z-z_2)}dz. \tag{3}$$

其中

$$z_1=\frac{1}{b}(-a+\sqrt{a^2-b^2});$$

$$z_2=\frac{1}{b}(-a-\sqrt{a^2-b^2}).$$

显然

$$z_1-z_2=\frac{2}{b}\sqrt{a^2-b^2},\qquad z_1+z_2=-\frac{2a}{b}, \tag{4}$$

$$z_1z_2=1,\qquad |z_2|>|z_1|,\ |z_1|<1. \tag{5}$$

因此，在(3)的右边的被积函数在 $|z|<1$ 内只有两个极点：$z=0$ 是二级极点，$z=z_1$ 是一级极点。

由第一节公式(13)，注意到(4)与(5)就得

$$R(z_1)=\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-z_1)(z-z_2)}=\frac{(z_1^2-1)^2}{z_1^2(z_1-z_2)}$$

$$=\frac{\left(z_1-\dfrac{1}{z_1}\right)^2}{z_1-z_2}=\frac{(z_1-z_2)^2}{z_1-z_2}=\frac{2}{b}\sqrt{a^2-b^2}. \qquad (6)$$

由第一节公式(12)得到

$$R(0)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-z_1)(z-z_2)}\right]$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z^2-1)^2}{(z-z_1)(z-z_2)}\right]. \qquad (7)$$

当$|z|$很小时，有

$$\frac{(z^2-1)^2}{(z-z_1)(z-z_2)}=(1-2z^2+z^4)\frac{1}{z_1z_2\left(1-\dfrac{z}{z_1}\right)\left(1-\dfrac{z}{z_2}\right)}$$

$$=(1-2z^2+z^4)\frac{1}{z_1z_2}\left(1+\frac{z}{z_1}+\cdots\right)$$

$$\times\left(1+\frac{z}{z_2}+\cdots\right).$$

显然，右边级数中 z 的一次幂的系数为

$$\frac{1}{z_1z_2}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)=\frac{z_1+z_2}{z_1^2z_2^2}=z_1+z_2=-2\frac{a}{b},$$

其中最后两个等式是利用(5)及(4)得到的，由此从(7)得到

$$R(0)=-2\frac{a}{b}. \qquad (8)$$

最后，从公式(3)，利用留数定理，注意到等式(6)与(8)，则得到

$$I=\frac{i}{4b}2\pi i[R(z_1)+R(0)]=-\frac{\pi}{2b}\left(\frac{2}{b}\sqrt{a^2-b^2}-2\frac{a}{b}\right)$$

$$=\frac{\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2}).$$

2） 形如$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$的积分计算(其中$f(x)$为实函数)

这种积分的值定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx.$$

对于函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的积分，我们在上半平面补充一条以a与b为两个端点的曲线$\Gamma_{a,b}$，使区间$[a, b]$与曲线$\Gamma_{a,b}$构成一条逐段光滑曲线$C_{a,b}$，把它所围的区域记作D（见图5-2）．如果能够找到一个在D内除了有限个孤立奇点外解析，在$\overline{D}$上除了这些点以外连续的函数$g(z)$，使得$g(z)$在$z=x$时，$g(x)=f(x)$（或者$\operatorname{Re} g(x)=f(x)$），那么由留数定理就得

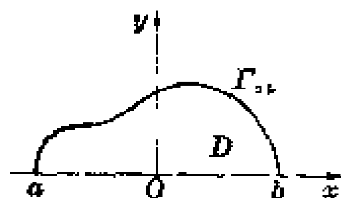


图 5-2

$$\int_a^b g(x)dx+\int_{\Gamma_{a,b}} g(z)dz=2\pi i\sum_{i=1}^{N_{a,b}}\operatorname*{Res}_{z=z_i} g(z). \tag{9}$$

其中$z_i(1\leqslant i\leqslant N_{a,b})$是在区域$D$内函数$g(z)$的孤立奇点．如果能够计算出

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_{\Gamma_{a,b}} g(z)dz,$$

则就能够计算出

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b g(x)dx,$$

因而也就能够计算出

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx.$$

总结以上所述，解这类问题，共有四步：

（一）积分闭路的选取；

（二）选择一个在闭路上除了一些孤立奇点外都解析的

函数 $g(z)$，使得 $g(x)=f(x)$ 或 $\operatorname{Re} g(x)=f(x)$；

（三）计算函数 $g(z)$ 在闭路内每一个孤立奇点上的留数，求这些留数之和；

（四）计算附加曲线上函数 $g(z)$ 积分的极限值.

在这四步中，第四步是很重要的. 为了今后应用起见，下面先介绍一个引理.

引理 1 设 Γ_{R_n} 为圆周 $|z|=R_n$ 的上半个圆周，函数 $g(z)$ 在 Γ_{R_n} 上连续，$R_n\uparrow+\infty$，并设

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in\Gamma_{R_n}}} z g(z)=0. \tag{10}$$

则

$$\lim_{R_n\to+\infty}\int_{\Gamma_{R_n}} g(z)dz=0. \tag{11}$$

【证】 由条件(10)得到，任给 $\varepsilon>0$，存在数 R_0，使当 $R_n>R_0$，$z\in\Gamma_{R_n}$ 时，有

$$|zg(z)|<\varepsilon,$$

即

$$|R_n g(R_n e^{i\theta})|<\varepsilon \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi). \tag{12}$$

由此当 $R_n>R_0$ 时，

$$\left|\int_{\Gamma_{R_n}} g(z)dz\right|\leqslant\int_0^{\pi}|g(R_n e^{i\theta})|\,|R_n i e^{i\theta}|d\theta<\pi\varepsilon.$$

即(11)成立. 】

注 若 Γ_{R_n} 是 $\operatorname{Im} z\geqslant b$ (b 是任何实数)上的圆周 $|z|=R_n$ 的一部分，引理仍成立.

定理 1 设函数 $g(z)$ 是在上半平面上，除去一些孤立奇点外的解析函数，且除去这些点以外在闭上半平面上连续. 若 $g(z)$ 满足引理 1 的条件，则

$$\lim_{R_n\to+\infty}\int_{-R_n}^{R_n} g(x)dx=2\pi i\lim_{R_n\to+\infty}\sum_{\substack{\operatorname{Im} z_i>0\\ |z_i|<R_n}}\operatorname{Res} f(z_i), \tag{13}$$

其中 $z_i\ (i=1, 2, \cdots)$ 是函数 $g(z)$ 在上半平面上的孤立奇点.

【证】 取等式(9)中的 $\Gamma_{a,b}$ 为 Γ_{R_n}, 利用引理 1, 由公式(11)就得到公式(13). 】

注 1 在实际应用时, 由于 $g(z)$ 在上半平面上经常只有有限个孤立奇点, 所以就有很大的方便.

注 2 若 $g(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 是有理函数, 且分子 $P(z)$ 是多项式, 它的次数比分母 $Q(z)$ (也是多项式)的次数至少低二次, 显然满足引理 1 的条件, 且因为积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

存在, 因此由(13), 即得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=2\pi i\sum \operatorname{Res}\frac{P(z_i)}{Q(z_i)}. \tag{14}$$

其中求和是对 $Q(z)$ 在上半平面上所有的零点取的.

【例 3】 求

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}\quad (n\ 是正整数).$$

解: 考虑

$$g(z)=\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}},$$

它显然满足引理 1 的条件. 此外函数 $g(z)$ 在上半平面的孤立奇点是分母 $1+z^2=0$ 的根, 即 $z=i$. 由此看出, $z=i$ 是函数 $g(z)$ 的 $n+1$ 级极点. 由公式(14), 得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}=2\pi i\,R(i).$$

其中 $R(i)$ 为函数 $g(z)$ 在 $z=i$ 处的留数. 由第一节公式(12)得到

$$R(i)=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^n}{dz^n}\left[(z-i)^{n+1}\frac{1}{(z+i)^{n+1}(z-i)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(z+i)^{2n+1}}$$

$$=\frac{1}{i}\cdot\frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n!2^{2n+1}}.$$

因而 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}\pi.$$

【例 4】 求

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2p}-x^{2q}}{1-x^{2r}}dx$$

(p, q, r 都是非负整数, 且 $p<r$, $q<r$).

解：考虑

$$g(z)=\frac{z^{2p}-z^{2q}}{1-z^{2r}},$$

由于 $0\leqslant p<r$, $0\leqslant q<r$, 且都是整数, 因此满足引理 1 的条件. 函数 $g(z)$的分母的所有一级零点为

$$z=e^{\frac{2k\pi i}{2r}}\quad(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2r-1),$$

当 $k=0$ 及 r 时,分别得到 $z=+1$ 及 $z=-1$,但是它们也是分子的零点,且级也相同,因此是可去奇点. 由此推出,在上半平面上,函数 $g(z)$的极点为

$$z_k=e^{\frac{k\pi i}{r}}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ r-1),$$

且都是一级极点.

由第一节公式(14)得到

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k}g(z)=\left.\frac{z^{2p}-z^{2q}}{(1-z^{2r})'}\right|_{z=z_k}=\frac{e^{\frac{k\pi i}{r}2p}-e^{\frac{k\pi i}{r}2q}}{-2re^{\frac{k\pi i}{r}(2r-1)}}$$

$$=\frac{1}{2r}\left[e^{(2q+1)\frac{k\pi i}{r}}-e^{(2p+1)\frac{k\pi i}{r}}\right].$$

这样一来，应用定理 4 的注 2 中的公式(14)，得到

$$I=2\pi i\sum_{k=1}^{r-1}\underset{z=z_k}{\text{Res}}\,g(z)=\frac{\pi i}{r}\sum_{k=1}^{r-1}\left[e^{(2q+1)\frac{k\pi i}{r}}-e^{(2p+1)\frac{k\pi i}{r}}\right]$$

$$=\frac{\pi i}{r}\left[\frac{e^{(2q+1)\frac{\pi i}{r}}\left(1-e^{(2q+1)\frac{(r-1)\pi i}{r}}\right)}{1-e^{(2q+1)\frac{\pi i}{r}}}\right.$$

$$\left.-\frac{e^{(2p+1)\frac{\pi i}{r}}\left(1-e^{(2p+1)\frac{(r-1)\pi i}{r}}\right)}{1-e^{(2p+1)\frac{\pi i}{r}}}\right]$$

$$=\frac{\pi i}{r}\left[\frac{1+e^{(2q+1)\frac{\pi i}{r}}}{1-e^{(2q+1)\frac{\pi i}{r}}}-\frac{1+e^{(2p+1)\frac{\pi i}{r}}}{1-e^{(2p+1)\frac{\pi i}{r}}}\right]$$

$$=\frac{\pi}{r}\left(\text{ctg}\,\frac{2p+1}{r}\pi-\text{ctg}\,\frac{2q+1}{r}\pi\right).$$

3) 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha x}f(x)dx$ 的积分计算(其中 α 为实数)

对这种形状的积分处理的方法与前面所用的方法是相同的．但是代替在前面所用的引理 1，有下列引理：

引理 2[约当(Jordan)引理] 设 $\alpha>0$，Γ_{R_n} 为圆周 $|z|=R_n$ 上的上半个圆周．设函数 $f(z)$ 在 Γ_{R_n} 上连续，其中 $R_n\uparrow+\infty$．若

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in\Gamma_{R_n}}}f(z)=0, \tag{15}$$

则

$$\lim_{R_n\to+\infty}\int_{|z|=R_n}e^{i\alpha z}f(z)dz=0. \tag{16}$$

【证】 由条件(15)知，任给 $\varepsilon>0$，存在数 R_0，使当 $R_n>R_0$，$z\in\Gamma_{R_n}$ 时，有

$$|f(z)|<\varepsilon$$

即

$$|f(R_n e^{i\theta})|<\varepsilon \quad (0\leqslant\theta\leqslant\pi). \tag{17}$$

因此，当 $R_n>R_0$ 时，由(17)得到

$$\left|\int_{\Gamma_{R_n}} e^{i\alpha z} f(z)dz\right| \leqslant \int_0^\pi \left|e^{i\alpha(R_n\cos\theta+iR_n\sin\theta)} f(R_n e^{i\theta}) R_n i e^{i\theta}\right| d\theta$$

$$\leqslant \varepsilon\int_0^\pi e^{-\alpha R_n\sin\theta} R_n d\theta$$

$$=R_n\varepsilon\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R_n\sin\theta} d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\alpha R_n\sin\theta} d\theta\right]$$

$$=R_n\varepsilon\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R_n\sin\theta} d\theta\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-R_n\sin(\pi-t)}(-1)dt\right]$$

$$=2R_n\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R_n\sin\theta} d\theta$$

$$\leqslant 2R_n\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}\alpha R_n\theta} d\theta, \text{*)}$$

---

*) 这里用了不等式

$$\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x \quad \left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

事实上，设 $h(x)=\dfrac{\sin x}{x}$,

则 $h'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\dfrac{\cos x(x-\operatorname{tg} x)}{x^2}<0 \quad \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

因此 $f(x)$ 在 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 是单调下降的函数，即在 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 上有

$$f(x)\geqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

这就证得了上述不等式。

即
$$\left|\int_{\Gamma_{R_n}} e^{iaz}f(z)dz\right|\leqslant 2R_n\varepsilon\left[-\frac{e^{-\frac{2\alpha}{\pi}R_n\theta}}{\frac{2\alpha}{\pi}R_n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}(1-e^{-\alpha R_n})\varepsilon.$$

由此证明了引理 2. 】

引理 3 设 Γ_{r_n} 为圆周 $|z|=r_n$ 的上半个圆周，函数 $f(z)$ 在 Γ_{r_n} 上连续，且 $r_n\downarrow+\infty$. 若
$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\Gamma r_n}} zf(z)=0, \tag{18}$$
则
$$\lim_{r_n\to 0}\int_{\Gamma r_n} f(z)dz=0. \tag{19}$$

证明的方法与证明引理 1 非常类似，留给读者自己证明.

注 若 Γ_{r_n} 为 $\operatorname{Im} z\geqslant b$ 上的圆周 $|z|=r_n$ 的一部分，引理 3 也成立.

定理 2 设函数 $f(z)$ 在 $\operatorname{Im} z>0$ 上除了一些孤立奇点外解析，在 $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ 除了这些点以外连续. 并设 $\alpha>0$，且函数满足引理 2 的条件，则
$$\lim_{R_n\to+\infty}\int_{-R_n}^{R_n} e^{iax}f(x)dx=2\pi i\lim_{R_n\to+\infty}\sum_{\substack{\operatorname{Im} z_k>0\\ |z_k|\leqslant R_n}}\operatorname*{Res}_{z=z_k} e^{iaz}f(z). \tag{20}$$

其中 $z_k(k=1, 2, \cdots)$ 是函数 $f(z)$ 在 $\operatorname{Im} z>0$ 上的孤立奇点.

证明的方法与证明本节定理 1 一样，应用引理 2 即得.

【例 5】 求
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx,\quad \alpha>0.$$

解：考虑函数

$$g(z)=\frac{e^{iaz}}{1+z^2},$$

显然函数 $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ 满足引理 2 的条件. 此外, 函数 $f(z)$ 在上半平面只有一个一级极点 $z=i$, 因此由(20)得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{1+x^2}dx=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=i}\left(\frac{e^{iaz}}{1+z^2}\right). \tag{21}$$

而
$$\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{e^{iaz}}{1+z^2}=\frac{e^{iaz}}{(1+z^2)'}\bigg|_{z=i}=\frac{e^{-a}}{2i}.$$

因而, 由(21)得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{1+x^2}dx=2\pi i\frac{e^{-a}}{2i}=\pi e^{-a}.$$

最后就有
$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{1+x^2}dx$$
$$=\frac{\pi}{2}e^{-a}.$$

【例 6】 求

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

解: 考虑函数

$$g(z)=\frac{e^{iz}}{z}.$$

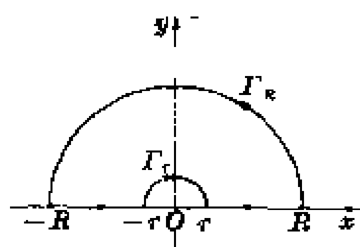


图 5-3

由于 $g(z)$ 在 $z=0$ 处有一个一级极点 $z=0$, 所以 $g(z)$ 不满足定理 1 的条件. 为此, 我们以原点为中心, r 及 $R(r<R)$ 为半径作两个圆周, 并以 Γ_r 及 Γ_R 分别表示这两个圆周的上半个圆周. 取图 5-3 的积分路径. 根据柯西定理, 得

$$\int_r^R\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\Gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=0. \tag{22}$$

对第三项积分，作变换 $x=-t$，得

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx=-\int_{r}^{R}\frac{e^{-it}}{t}dt, \tag{23}$$

根据引理 2，有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0. \tag{24}$$

下面证明

$$\lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=-\pi i. \tag{25}$$

事实上，由 $$e^{iz}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots,$$

得 $$\frac{e^{iz}}{z}=\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n!}+\cdots=\frac{1}{z}+p(z).$$

其中 $p(z)$ 在 $z=0$ 处解析. 因此有

$$\lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=\lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{1}{re^{i\theta}}rie^{i\theta}d\theta+\lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_r}p(z)dz$$
$$=-\pi i+0=-\pi i.$$

这是因为函数 $p(z)$ 在 $z=0$ 附近有界，设 $|p(z)|\leqslant M$，则

$$\left|\int_{\Gamma_r}p(z)dz\right|\leqslant M\pi r\to 0.$$

这样一来，从等式(22)，利用(23)、(24)及(25)得到

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}}\int_{r}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx=\pi i,$$

即 $$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

4) 其他一些类型的积分计算

【例 7】 计算积分

$$I_1=\int_{0}^{+\infty}\cos(x^2)dx,\quad I_2=\int_{0}^{+\infty}\sin(x^2)dx.$$

解：为了计算这两个积分，考虑函数 $f(z)=e^{iz^2}$ 及积分

$$I=\int_0^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx=I_1+iI_2.$$

如果考虑复函数 $f(z)=e^{iz^2}$，则当它在正实轴上积分时，就是所要求的两个积分．现在作辅助曲线，使得它能与正实轴构成闭曲线，而在此辅助曲线上的值或其极限值又能够计算出来．考虑函数 $f(z)=e^{iz^2}$ 在直线 $y=x$ 上的积分

$$p=\int_{0}^{+\infty e^{i\frac{\pi}{4}}} e^{iz^2}dz=\int_0^{+\infty} e^{i(x+ix)^2}(1+i)\,dx=(1+i)\int_0^{+\infty} e^{-2x^2}dx$$

$$=\frac{1+i}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{1+i}{2}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}. \tag{26}$$

其中最后一个等式是由概率积分得到的．事实上，

$$R_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy=1. \tag{27}$$

这个结果利用重积分容易证明．事实上，

$$R_1^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\int_0^R\int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}r\,dr\,d\theta$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\left(1-e^{-\frac{R^2}{2}}\right)=1.$$

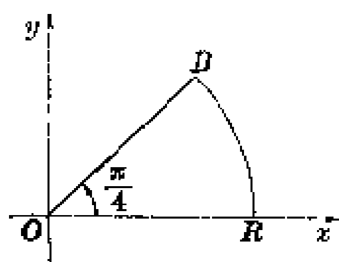


图 5-4

由此得到 $R_1=1$.

由于等式(26)，故可取图 5-4 中的闭路．应用柯西定理得到

$$0=\int_0^R e^{ix^2}dx+\int_{\widehat{RD}} e^{iz^2}dz+\int_D^0 e^{iz^2}dz,$$

即

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{\widehat{RB}} e^{iz^2}dz + P. \tag{28}$$

其中 $P=\frac{(1+i)\sqrt{2\pi}}{4}$ 由公式(26)所确定. 对于等式右边的积分,有

$$\left|\int_{\widehat{RB}} e^{iz^2}dz\right| \leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|e^{iR^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)}\right|d\theta = R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\theta}d\theta$$

$$\leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\frac{4\theta}{\pi}}d\theta = R\left.\frac{e^{-\frac{4R^2}{\pi}\theta}}{-\frac{4R^2}{\pi}}\right|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1-e^{-R^2}}{R}\right)\to 0.$$

由此根据(28),就得到

$$I=\int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx=\frac{1+i}{4}\sqrt{2\pi}.$$

因而

$$I_1=\int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{4},$$

$$I_2=\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

【例 8】 求

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx, \quad a>0.$$

解: 若 $b=0$, 则

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{\sqrt{2a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{29}$$

若 $b\neq 0$, 因为 $\cos x$ 是偶函数, 因此只需考虑 $b>0$ 的情况.

根据前面的经验，似乎应该取 $f(z)=e^{-az^2}e^{ibz}$. 下面分析应该取什么样的闭曲线才比较合适。

因为

$$I=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2-ibx)}dx=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,e^{-\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a\left(x-\frac{b}{2a}i\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{-\frac{b^2}{4a}}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty-\frac{b}{2a}i}^{+\infty-\frac{b}{2a}i}e^{-az^2}dz. \tag{30}$$

而由(29)知道：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{31}$$

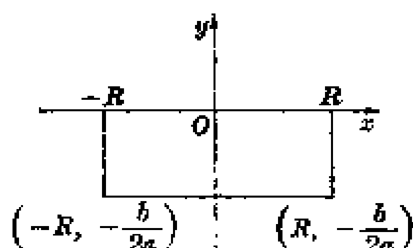


图 5-5

由此看出，应该取函数 $F(z)=e^{-az^2}$；而积分闭曲线应该取图5-5的长方形区域的边界 C_R. 由柯西定理得到

$$0=\int_{C_R}e^{-az^2}dz=\int_{R-0i}^{-R-0i}e^{-az^2}dz$$

$$+\int_{-R-0i}^{-R-\frac{b}{2a}i}e^{-az^2}dz+\int_{-R-\frac{b}{2a}i}^{R-\frac{b}{2a}i}e^{-az^2}dz$$

$$+\int_{R-\frac{b}{2a}i}^{R-0i}e^{-az^2}dz. \tag{32}$$

比较(30)与(32)，就得到

$$I=\frac{-1}{2}e^{-\frac{b^2}{4a}}\,\mathrm{Re}\left[\lim_{R\to+\infty}\int_{R-\frac{b}{2a}i}^{R-0i}e^{-az^2}dz+\lim_{R\to+\infty}\int_{R-0i}^{-R-0i}e^{-az^2}dz\right.$$

$$\left.+\lim_{R\to+\infty}\int_{-R-0i}^{-R-\frac{b}{2a}i}e^{-az^2}dz\right]$$

$$=\frac{-1}{2}e^{-\frac{b^2}{4a}}\,\mathrm{Re}[I_1+I_2+I_3]. \tag{33}$$

对于 I_2，根据(31)，有

$$I_2 = -\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

现在证明 $I_1=I_3=0$. 事实上,对于 I_1,有

$$\left|\int_{\substack{\operatorname{Re} z=R\\ \operatorname{Im} z\text{从}-\frac{b}{2a}\text{到}0}} e^{-az^2}dz\right| = \left|\int_{-\frac{b}{2a}}^{0} e^{-a(R+iy)^2}dy\right|$$

$$\leqslant \int_{-\frac{b}{2a}}^{0} e^{-a(R^2-y^2)}dy \leqslant e^{-aR^2}e^{a\frac{b^2}{4a^2}}\cdot\frac{b}{2a}\to 0 \quad (R\to+\infty).$$

因此 $I_1=0$,同样可证 $I_3=0$. 这样一来,从(33)就得到

$$I=\frac{1}{2}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

关于用多值函数来计算积分的例子将在第七章中介绍.

习 题 5·2

1. 计算下列的积分:

(1) $\int_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$,其中 C 是 $x^2+y^2=2(x+y)$;

(2) $\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$, $|a|<1$, $|b|<1$, n 是整数;

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a>0$;　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$;

(5) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\sin\theta}$, $a>1$;　　(6) $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}$;

(7) $\int_0^{\pi}\operatorname{ctg}(x-a)dx$, $a=\alpha+i\beta$, $\beta\neq 0$;

(8) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^4}dx$;　　(9) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$;

(10) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+1}dx$;　　(11) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)^2}dx$.

2. 计算 $\int_C \operatorname{tg}\pi z\,dz$,其中 C 是圆周 $|z|=n$ $(n=1, 2, \cdots)$.

第三节 幅角原理及其应用

这一节所介绍的幅角原理，实质上是通过留数定理进一步研究解析函数的积分所得到的结果. 应用幅角原理，可以研究在一个区域中的多项式根的个数问题. 本节中的结果对于今后研究解析函数的几何理论也有重要的意义.

我们希望求出在某一个区域内解析函数 $f(z)$ 的零点的个数. 设函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 处有 n 级零点，那么如何通过与函数 $f(z)$ 有关的函数在 $z=a$ 的邻域中的积分来表示数 n 呢？根据第四章第二节定理 1，函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 的某个邻域 $|z-a_1|<\delta$ 中可以展开为泰勒级数

$$f(z)=c_n(z-a)^n+c_{n+1}(z-a)^{n+1}+\cdots \quad (c_n\neq 0)$$
$$=(z-a)^n\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 在 $|z-a|<\delta$ 中解析，且 $\varphi(a)\neq 0$. 可以认为在此邻域 $|z-a|<\delta$ 中，$\varphi(z)\neq 0$. 显然有

$$f'(z)=n(z-a)^{n-1}\varphi(z)+(z-a)^n\varphi'(z).$$

这样一来，在 $0<|z-a|<\delta$ 中，就有

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

由于函数 $\varphi(z)$ 在 $|z-a|<\delta$ 中不等于零，因此函数 $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ 在 $|z-a|<\delta$ 内解析. 应用柯西定理，得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\delta_1<\delta}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=n.$$

如果要研究某一个区域内函数 $f(z)$ 的极点的个数. 设函数 $f(z)$ 在 $z=b$ 处有 m 级极点. 根据第四章第三节定理 1，函数在 $z=b$ 处的罗朗展开式为

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-b)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-b}+c_0+c_1(z-b)+\cdots\quad (c_{-m}\neq 0)$$
$$=\frac{1}{(z-b)^m}\psi(z),\ 0<|z-b|<\delta.$$
其中 $\psi(z)$在圆 $|z-b|<\delta$ 内解析，且 $\psi(b)=c_{-m}\neq 0$. 显然有
$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-m}{z-b}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$
由于 $\psi(b)\neq 0$, 因此也可以认为它在 $|z-b|<\delta$ 内不等于零. 这样, $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ 就是 $|z-b|<\delta$ 内的解析函数了. 应用柯西定理, 得到
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-b|=\delta_1<\delta}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=-m.$$
以上结果，可以总结如下：若函数 $f(z)$ 以 $z=a$ 为其 n 级零点, 则 $z=a$ 必是函数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一级极点，且留数为 n; 若函数 $f(z)$ 以 $z=b$ 为其 m 级极点, 则 $z=b$ 必是函数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一级极点，且留数为 $-m$. 若函数 $f(z)$ 在一个区域内又有零点, 又有极点, 则有下述定理:

定理 1 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除了有限个极点 b_i $(1\leqslant i\leqslant k)$ 以外解析，其级为 m_i $(1\leqslant i\leqslant k)$. 函数 $f(z)$ 在区域 D 内只有有限个零点 a_i $(1\leqslant i\leqslant l)$, 其级为 n_i $(1\leqslant i\leqslant l)$. 设 C 是 D 内一条包有函数 $f(z)$ 的全部零点及全部极点的闭曲线, 则有
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{i=1}^{l}n_i-\sum_{i=1}^{k}m_i=N-P, \qquad (1)$$
其中 N 表示 D 内函数 $f(z)$ 的全部零点的个数，有几级零点就算几次; P 表示 D 内函数 $f(z)$ 的全部极点的个数，有几级极点就算几次.

【证】 根据上面的讨论，函数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 C 及其所围的闭区域上除了一级极点 a_i $(1\leqslant i\leqslant l)$ 及 b_i $(1\leqslant i\leqslant k)$ 外都是解析的，且对应的留数为 n_i $(1\leqslant i\leqslant l)$ 及 m_i $(1\leqslant i\leqslant k)$. 由此应用留数定理即可得到(1). ▌

下面说明公式(1)的几何意义：设 C 是一条逐段光滑闭曲线，在变换 $W=f(z)$ 之下，当 z 沿着 C 按逆时针方向绕行一圈时，$W=f(z)$ 就在 W 平面上沿着某条闭曲线 Γ 旋转，当然曲线 Γ 比较复杂，它可以有重点，也可以按正方向绕原点几圈，也可以按负方向绕原点几圈（见图 5-6）. 这样一来，就有

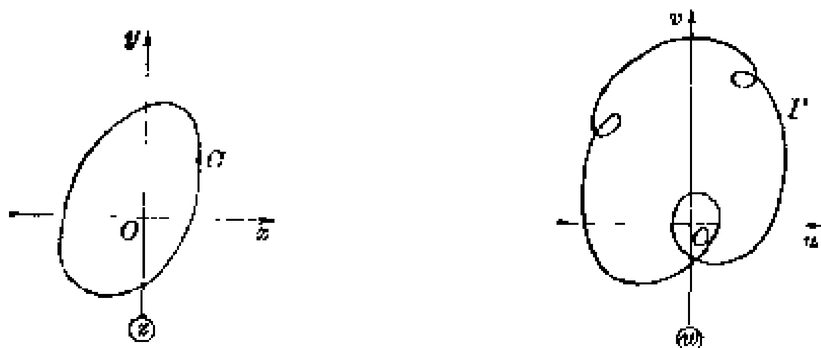


图 5-6

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dW}{W},$$

其中 Γ 的绕行方向完全由 C 的绕行方向及变换 $W=f(z)$ 所决定. 我们知道，若 Γ 中有一段闭曲线，它不绕原点时，则上式右边在这一段曲线上的积分为零；若 Γ 中有一段闭曲线，它按逆时针方向绕原点一圈，则上式右边在这一段曲线上的积分为 1；若 Γ 中有一段闭曲线，它按顺时针方向绕原点一圈，则上式右边在这一段曲线上的积分为 -1. 而 W 的幅角除以 2π、$\frac{1}{2\pi}\arg W$ 也正好具有这个性质，即：当 W 沿不绕原点的闭曲线走一圈时，$\frac{1}{2\pi}\arg W$ 的改变量为零；当 W 沿

着绕原点的曲线按逆时针方向走一圈时，$\frac{1}{2\pi}\arg W$ 的改变量为1；当 W 沿着绕原点的曲线按顺时针方向走一圈时，$\frac{1}{2\pi}\arg W$ 的改变量为 -1. 因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg W=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z).$$

其中 $\Delta_\Gamma \arg W$ 表示 W 从 Γ 上的一点出发，按 Γ 确定的方向绕 Γ 一圈后 $\arg W$ 的改变量；而 $\Delta_C \arg f(z)$ 表示 z 从 C 上的一点出发，按 C 的逆时针方向绕 C 一圈后 $\arg f(z)$ 的改变量. 实际上，这个结果也可以从

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dW}{W}=\frac{1}{2\pi i}(\ln|W|+i\arg W)_\Gamma$$

看出来. 这样一来，就得到

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z). \tag{2}$$

这公式称为*幅角原理*.

注1 在本节定理1的条件下，若函数 $f(z)$ 除了这些极点外在闭区域 $\overline{D}$ 上连续，且区域 D 的边界就是 C，则等式(2)仍成立.

事实上，首先可以取一条闭曲线 C'，它的内部包有其全部零点及极点，且 C' 本身属于 D. 则对此曲线 C'，根据定理1就有

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_{C'}\arg f(z),$$

然后过渡到极限 $C'\to C$，利用函数 $f(z)$ 的连续性即得.

注2 若函数 $f(z)$ 在 D 内无极点，则

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z); \tag{3}$$

若函数 $f(z)$ 在 D 内无零点，则

$$P = -\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z). \tag{4}$$

利用幅角原理就可以研究某一个区域内的零点与极点的个数之差，而在具体应用时，下面的定理更为方便.

定理 2[鲁歇 (Rouché) 定理]　设函数 $f(z)$ 及 $\varphi(z)$ 都在区域 D 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，其中 C 为逐段光滑曲线. 若满足

$$|f(z)|>|\varphi(z)|, \quad z\in C, \tag{5}$$

则函数 $f(z)$ 与函数 $f(z)+\varphi(z)$ 在 D 内的零点的个数相同.

【证】　由条件(5)知，函数 $f(z)$ 在 C 上不为零，函数 $f(z)+\varphi(z)$ 在 C 上也不为零，所以

$$|f(z)+\varphi(z)|\geqslant|f(z)|-|\varphi(z)|>0.$$

由此推出，函数 $f(z)$ 与函数 $f(z)+\varphi(z)$ 在区域 D 内只可能有有限个零点. 事实上，在相反的情况下，即：若有一个函数在 $\overline{D}$ 内有无穷多个零点，则这些零点必有一个凝聚点. 根据连续性，这个凝聚点不可能在边界 C 上，否则，函数在这点取值就为零了；这个凝聚点也不可能在 D 内，否则，根据第三章的唯一性定理，这个函数必需恒等于零，因此会导致矛盾. 这样一来，这两个函数 $f(z)$ 及 $f(z)+\varphi(z)$ 都满足定理 1 的注 1 的条件. 由于这两个函数在 D 内都没有极点，因而在设 N_1 是 $f(z)$ 在 D 内零点的个数，N_2 是 $f(z)+\varphi(z)$ 在 D 内零点的个数后，就有

$$N_1=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z);$$

$$N_2=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg(f(z)+\varphi(z)).$$

由此得到

$$N_1-N_2=\frac{1}{2\pi}[\Delta_C\arg f(z)-\Delta_C\arg(f(z)+\varphi(z))]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Big(\Delta_C\arg f(z)-\Delta_C\arg f(z)$$

$$-\Delta_C\arg\Big(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\Big)\Big)$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\Delta_C\arg\Big(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\Big).$$

现在考察函数

$$W=1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}:$$

当 z 在 C 上变化时，函数

$$\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|<1,$$

因此 W 就在以 $W=1$ 为中心，半径为 1 的圆内变化，即它不绕点 $W=0$(见图 5-7). 因此，当 z 绕 C 按逆时针方向走一圈后，

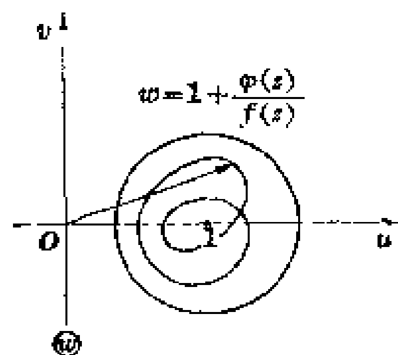


图 5-7

$$\arg W=\arg\Big(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\Big)$$

的改变量为零. 因而 $N_1=N_2$. ▌

【例 1】 求函数

$$F(z)=z^9-5z^5+2z-1$$

在 $|z|<1$ 内的零点的个数.

解: 设 $F(z)=f(z)+\varphi(z)$，其中

$$f(z)=-5z^5,\quad \varphi(z)=z^9+2z-1.$$

在 $|z|=1$ 上，显然有

$$|f(z)|=5,\ |\varphi(z)|\leqslant|z^9|+|2z|+|-1|=4.$$

因而 $$|f(z)|>|\varphi(z)|.$$

根据鲁歇定理知道，函数

$$F(z)=f(z)+\varphi(z)$$

在 $|z|<1$ 内的零点的个数等于函数 $f(z)=-5z^5$ 在 $|z|<1$ 内的零点的个数，即有五个零点.

应用鲁歇定理还可以证明代数基本定理，留给读者自己证明.

此外，用幅角原理还可以判别线性常系数微分方程解的稳定性问题. 这里关键是要判别一个多项式

$$P_n(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n \tag{6}$$

的零点是否都在左半平面，即其根的实部是否都是负数.

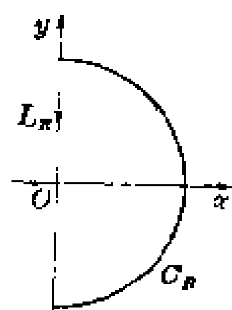


图 5-8

首先假设多项式 (6) 在虚轴上没有根. 这对在实际问题中具体给定的多项式可以具体地来验算. 下面给出一个判别全部根都在左半平面上的方法.

考虑图 5-8 中的闭曲线 $\Gamma_R=C_R+L_R$，其中 C_R 为原点在中心、半径为 R 的右半个圆周，L_R 是虚轴上从 Ri 到 $-Ri$ 的直线段. 根据幅角原理，要使多项式(6)的全部根在左半平面的充要条件是：

$$\lim_{R\to+\infty}\Delta_{\Gamma_R}\arg P_n(z)=0. \tag{7}$$

显然有

$$\Delta_{\Gamma_R}\arg P_n(z)=\Delta_{C_R}\arg P_n(z)+\Delta_{\Gamma_R}\arg P_n(z). \tag{8}$$

现在证明

$$\lim_{R\to+\infty}\Delta_{C_R}\arg P_n(z)=n\pi. \tag{9}$$

事实上，
$$P_n(z)=z^n(1+\varphi(z)),$$

其中
$$\varphi(z)=\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}.$$

显然

$$\lim_{z\to+\infty}\varphi(z)=0, \tag{10}$$

因此

$$\Delta_{C_R}\arg P_n(z)=\Delta_{C_R}\arg z^n+\Delta_{C_R}\arg(1+\varphi(z))$$
$$=-n\pi+\Delta_{C_R}\arg(1+\varphi(z)) \tag{11}$$

当 R 充分大时，由于(10)，函数 $1+\varphi(z)$ 就在以 1 为中心、半径为任意小的正数 ε 的圆内变化，因此

$$\lim_{R\to+\infty}\Delta_{L_R}\arg(1+\varphi(z))=0. \tag{12}$$

比较(11)与(12)，就得到(9). 再比较(7)、(8)及(9)，就得到

$$\lim_{R\to+\infty}\Delta_{C_R}\arg P_n(z)=-n\pi. \tag{13}$$

这就是 $P_n(z)$ 的全部根在左半平面上的充要条件.

下面介绍鲁歇定理的另一个应用.

定理 3 [霍尔维茨 (Hurwitz) 定理] 设 D 是一个区域，且 D 内的解析函数序列 $f_n(z)$ 在 D 内闭一致收敛于函数 $f(z)\not\equiv 0$. 并设 C 是 D 内的任意一条闭曲线，其内部也属于 D，且 C 不经过函数 $f(z)$ 的零点. 则存在一个依赖于曲线 C 的数 N，使得当 $n>N$ 时，函数 $f_n(z)$ 在 C 内的零点的个数等于函数 $f(z)$ 在 C 内的零点的个数.

【证】 根据定理的条件，解析函数序列 $f_n(z)$ 在 D 内闭一致收敛于函数 $f(z)$，由第三章中的魏尔斯特拉斯第一定理知道，$f(z)$ 是区域 D 上的解析函数. $f(z)$ 当然在 C 上连续，由于在 C 上，$f(z)\neq 0$，因此根据第二章第一节定理 5，它的模达到最小值，即存在一点 $z_2\in C$，使得

$$\min_{z\in C}|f(z)|=|f(z_2)|>0. \tag{14}$$

由于函数序列 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在曲线 C 上一致收敛于函数 $f(z)$，因此任给 $\varepsilon>0$（取 $\varepsilon=|f(z_2)|$），存在数 N，使当 $n>N$ 时，就有

$$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon=|f(z_2)|. \tag{15}$$

现在考虑两个函数 $f(z)$ 与

$$f_n(z)=f_n(z)-f(z)+f(z).$$

由于(14)及(15)，在 C 上满足

$$|f(z)|\geqslant|f(z_2)|>|f_n(z)-f(z)|.$$

由此，根据鲁歇定理可推出，函数 $f(z)$ 与 $f_n(z)$ 在 C 内的零点的个数相等．定理证毕．∎

习 题 5·3

1．求下列函数在 $|z|<1$ 内零点的个数：

(1) $z^6-4z^5+z^2-1$；　　(2) $4z^7-z^3-7z-1$；

(3) $2z^5-z^3+3z^2-z+8$．

2．证明方程 $e^z=az(a>e)$ 在 $|z|<1$ 内只有一个实根．

3．证明方程 $ze^{\lambda-z}=1(\lambda>1)$ 在 $|z|<1$ 内只有一个正实根．

4．试用幅角原理证明代数基本定理．

第五章小结

1．对于解析函数的孤立奇点可以引进留数的概念，它与这个解析函数在孤立奇点处的罗朗展开式中第一个负幂项的系数密切有关，给出了计算留数的几个具体方法．留数定理是计算闭路上函数积分的一个很好的方法，由此可用统一的方法求三角有理函数、有理函数、三角函数与有理函数的乘积及其他各种类型的积分值．

2．应用留数定理可以得到幅角原理，它通过函数的幅角在闭路上的改变量来计算这个闭路内全部零点的个数与全部极点的个数之差．由幅角原理还可以得到一个重要的定理——鲁歇定理，用它可以比较两个函数在闭路中的零点个数，

特别是计算闭路内函数零点的个数．由此可以得到代数基本定理以及判别一个多项式在右半平面有没有根的问题，这在研究常微分方程的稳定性理论中很有用处．此外还得到了霍尔维茨定理．

第五章复习讨论题

1．什么叫留数？试讨论孤立奇点与留数之间的关系．

2．叙述留数定理，在它的证明中，关键是用到哪个定理？

3．留数有几种求法？它与函数的罗朗展开式中的系数有怎样的关系？

4．函数在无穷远处的留数是如何定义的？若函数在无穷远点是可去奇点，那么留数是否一定等于零？

5．求下列函数在孤立奇点处的留数（包括无穷远点一起考虑）：

(1) $\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$，n 是正整数；　　(2) $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$；

(3) $\sin\dfrac{z}{z+1}$；　　(4) $e^{z+\frac{1}{z}}$；

(5) $\operatorname{ctg}^2 z$．

6．用留数定理计算定积分的主要步骤是哪些？试举一例说明之．

7．计算下列定积分值：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}$，$a>0$；　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+\sin^2 x}$，$a>0$；

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^{2n}x\,dx$，$n$ 正整数；　　(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,dx$；

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}$，$a>0$，$b>0$；

(6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\,dx$；　　(7) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx$．

8．幅角原理的几何意义是怎样的？

9．比较柯西定理、柯西公式、留数定理及幅角原理相互之间的关系．

10．鲁歇定理是怎样的？举例说明如何运用它来研究函数在区域内零点的个数．

11. 求方程 $z^4-5z+1=0$ 在(1) $|z|<1$ 内零点的个数；(2) 在 $1<|z|<2$ 内零点的个数.

12. 方程 $z^4-8z+10=0$ 在 (1) $|z|<1$ 内有几个根？(2) 在 $1<|z|<3$ 内有几个根？

13. 证明方程 $z=\lambda-e^{-z}$ $(\lambda>1)$ 在右半平面上有唯一的一个实根.

14. 证明方程

$$a_0+a_1\cos\theta+a_2\cos 2\theta+\cdots+a_n\cos n\theta=0$$

当 $0<a_0<a_1<\cdots<a_n$ 时，在区间 $0<\theta<2\pi$ 上有且只有 $2n$ 个互不相同的根，且这个方程没有虚根.

15. 试证：在定理 6 的条件下，若 $\varphi(z)$ 在区域 D 内解析，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_{i=1}^{l} n_i\varphi(a_i)-\sum_{i=1}^{k} m_i\varphi(b_i).$$

其中 a_i $(1\leqslant i\leqslant l)$ 是函数 $f(z)$ 在 D 内的全部零点，且是 n_i 级零点，而 b_i $(1\leqslant i\leqslant k)$ 是函数 $f(z)$ 在 D 内的全部极点，且是 m_i 级极点，C 是 D 内的一条闭曲线，其内部也属于 D，且包含这些零点及极点在其内部.

*16. 证明多项式

$$P_6(z)=z^6+z^5+6z^4+5z^3+8z^2+4z+1$$

的全部零点都在左半平面上.

[提示：首先证明多项式 $P_6(z)$ 在虚轴上没有根，然后再验证第三节中公式(13)的正确性.]

第六章

解析开拓

在第二章及第四章中，我们已经见到：很多实函数，如 e^x、$\sin x$、$\cos x$ 等，都可以唯一地扩充为复平面上的解析函数 e^z、$\sin z$ 及 $\cos z$ 等. 这样一来，我们对这些函数的性质就认识得更清楚了. 在这一章中，我们将研究一般解析函数的解析开拓的概念及方法. 解析开拓可以使我们对多值函数的本质了解得更清楚. 利用多值函数可以很好地来计算某些定积分. 此外，我们还要引进黎曼曲面的概念以及将多值函数看作黎曼曲面上的单值解析函数. 最后，将讨论一类特殊函数——Γ 函数，它在各种理论及实际问题中有广泛的应用.

第一节　解析开拓的概念与方法

1.1　解析开拓的概念

解析开拓是复变函数中的一个重要概念.

定义 1　设函数 $f(z)$ 在集合 E 上有定义. 若存在区域 $D\supset E$ 及区域 D 上的解析函数 $F(z)$，使得在集合 E 上有 $F(z)=f(z)$，则称函数 $F(z)$ 是 $f(z)$ 从 E 开拓到 D 的解析函数，简称 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的解析开拓.

【例 1】　函数 e^z 是 e^x 的解析开拓.

解：设 $E=(-\infty, +\infty)$，当 $z\in E$ 时，$e^z=e^x$，而 e^z 又是全平面上的解析函数，因此 e^x 可以解析开拓为全平面上的函数 e^z.

【例 2】 由幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 所确定的函数 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 上解析，它可以解析开拓到全平面除去 $z=1$ 的区域 D。

解：已知

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\frac{1}{1-z}, \quad |z|<1.$$

因此，设 E 是 $|z|<1$，则函数 $F(z)=\frac{1}{1-z}$ 就在 D 内解析，且在 E 上有 $F(z)=f(z)$。

下面我们提出三个问题：1) 定义 1 中的解析开拓函数是否一定存在？2) 如果存在，则是否唯一？3) 有哪些方法可以具体地实现解析开拓？

第一个问题的回答是否定的：因为存在一个在 E 上的连续函数 $f(z)$，它甚至还可以有任意阶的导数，但它不可能解析开拓到包含 E 的任何区域 D 中去．请看下面的例子：

【例 3】 函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases} \tag{1}$$

在 $E=(-\infty, +\infty)$ 上有任意多阶导数，但它不能解析开拓到包有 $z=0$ 的区域．

解：用反证法．假设不然，则存在 $z=0$ 处的解析函数 $F(z)$，它在 $E=(-\infty, +\infty)$ 上有 $F(x)=f(x)$．因此，根据第四章第二节定理 1，函数 $F(z)$ 在 $z=0$ 处可以展开为泰勒级数

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n=\frac{F^{(n)}(0)}{n!}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \tag{2}$$

下面证明 $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=0 \quad (n=0, 1, \cdots)$。

首先证明

$$f^{(n)}(x)=P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\quad (x\neq 0),\tag{3}$$

其中 $P(y)$是多项式．事实上，当 $n=0$ 时，根据定义，等式(3)显然成立．用数学归纳法：设公式(3)对于 $n=k$ 成立，即

$$f^{(k)}(x)=Q\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\quad (x\neq 0),$$

其中 $Q(x)$是多项式，则

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=\left(Q\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right)'\\&=Q'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}+Q\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)\\&=P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},\end{aligned}$$

其中 $P(y)=-y^2Q'(y)-2y^3Q(y)$ 也是一个多项式．这就证明了(3)．

为了证明 $a_n=0\ (n=0,1,\cdots)$，也用数学归纳法：从(1)式知道，$a_0=f(0)=0$．设 $n=k$ 时，$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=0$，则由(3)可得

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}p\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\\&=\lim_{y\to+\infty}yP(y)e^{-y^2}=0,\end{aligned}$$

即 $a_{k+1}=\frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}=0$，因此得到 $a_n=0\ (n=0,1,\cdots)$．

这样一来，从(2)就得到 $F(z)\equiv 0$．即 $f(x)=F(x)\equiv 0$．这就出现了矛盾．因此 $f(x)$ 不能解析开拓到包有 $z=0$ 的区域．

下面还可看到：存在区域 E 中的解析函数，它不能从 E 中解析开拓到包有 E 的任意一个区域中．

对于第二个问题，当集合 E 包有凝聚点在区域 D 内时，这样的解析开拓必是唯一的．事实上，若存在两个在 D 内的解析函数 $F_1(z)$ 与 $F_2(z)$ 使得在 E 上有 $F_1(z)=F_2(z)=f(z)$，则由于 E 在 D 内有凝聚点，根据第四章中的唯一性定理，就推出在 D 内 $F_1(z)\equiv F_2(z)$．

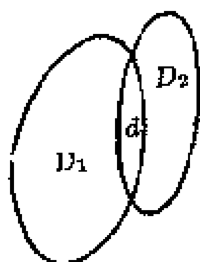


图 6-1

对于第三个问题，在下面介绍几个方法．

定理 1 设平面上的区域 D_1 与 D_2 有一个公共部分 d(见图 6-1)，函数 $f_1(z)$ 在 D_1 解析；函数 $f_2(z)$ 在 D_2 解析，且在 $d=D_1\cap D_2$[*)] 上 $f_1(z)=f_2(z)$，则函数

$$F(z)=\begin{cases}f_1(z), & z\in D_1\setminus d;\\ f_2(z), & z\in D_2\setminus d;\\ f_1(z)=f_2(z), & z\in d\end{cases}\tag{4}$$

是区域 $D=D_1+D_2$ 上的单值解析函数．

【证】 首先，三个集合 $D_1\setminus d$、$D_2\setminus d$ 及 d 互不相交，因此公式(4)确定了一个在 $D=D_1+D_2=(D_1-d)+(D_2-d)+d$ 上的单值函数．

此外，当 $z\in D_1\setminus d$ 或 $z\in d$ 时，$F(z)=f_1(z)$，因此 $F(z)$ 解析．当 $z\in D_2\setminus d$ 时，$F(z)=f_2(z)$，所以 $F_2(z)$ 也是解析的．】

上面得到的函数 $F(z)$ 称为函数 $f_1(z)$ 由 D_1 到 $D=D_1+D_2$ 的解析开拓；或称函数 $F(z)$ 是函数 $f_2(z)$ 由 D_2 到 $D=D_1+D_2$ 的解析开拓．或称 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 互为解析开拓．

在这里如果已知函数 $f_1(z)$ 在区域 D_1 内解析，则关键是

---

*) 设 A、B 是两个点集，$A\cap B$ 表示所有既属于 A 又属于 B 的点所构成的点集；$A\setminus B$ 表示属于 A，但不属于 B 的点构成的点集；$A+B$ 或 $A\cup B$ 表示所有至少属于 A 或 B 的点构成的点集．

要找某个区域 D_2 内的一个解析函数 $f_2(z)$，且使得 D_1 与 D_2 有公共部分 d，在此公共部分 d 上还要求 $f_2(z)=f_1(z)$. 如果这种函数 $f_2(z)$ 及这样的区域 D_2 能找到的话，那么就能够实现解析开拓了. 如例 2 中由幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 所确定的函数 $f_1(z)=\frac{1}{1-z}$，只有当 D_1 是 $|z|<1$ 时才成立. 此外，我们将全平面上除去 $z=1$ 的区域记作 D_2，而函数 $f_2(z)=\frac{1}{1-z}$ 在 D_2 解析，且在 D_1 上有 $f_2(z)=f_1(z)$. 因此，$f_2(z)=\frac{1}{1-z}$ 可以看作原来由幂级数所确定的函数 $f_1(z)$ 的解析开拓.

根据解析开拓的唯一性，故有时把由函数 $f_1(z)$ 从 D_1 解析开拓到 $D=D_1+D_2$ 的函数 $F(z)$ 仍然写作 $f_1(z)$. 这不会引起什么混乱，如例 2 中的 $F(z)=f_1(z)=\frac{1}{1-z}$ 即是，只是它在 $|z|<1$ 上才可以展开为 $z=0$ 的泰勒级数.

【例 4】 设 $f_1(z)=|z|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\arg z}{2}}$ 在区域 D_1: $0<\arg z<\pi$ 上解析；函数 $f_2(z)=|z|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\arg z}{2}}$ 在区域 D_2: $\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3}{2}\pi$ 上解析. 显然在 $d=D_1\cap D_2$ 上，即在 $\frac{\pi}{2}<\arg z<\pi$ 上，$f_1(z)=f_2(z)$，因此，函数

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z), & 0<\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}; \\ f_1(z)=f_2(z), & \frac{\pi}{2}<\arg z<\pi; \\ f_2(z), & \pi\leqslant\arg z<\frac{3}{2}i. \end{cases} \tag{5}$$

即 $$F(z)=|z|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\arg z}{2}},\quad 0<\arg z<\frac{3}{2}\pi$$

就是解析函数.

从例 2 及例 4 可以看出：原来的函数 $f_1(z)$ 虽然只定义在区域 D_1 上，只是由于这两个函数"本质上都很好"，所以可以进行解析开拓.

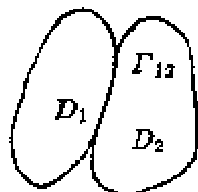


图 6-2

下面给出一个通过边界进行解析开拓的定理：

定理 2 设区域 D_1 与 D_2 有公共边界 Γ_{12}，它是一条逐段光滑曲线(图 6-2)．设函数 $f_1(z)$在 D_1 内解析，在 $D_1+\Gamma_{12}$ 上连续；函数 $f_2(z)$在 D_2 内解析，在 $D_2+\Gamma_{12}$ 上连续，且满足 $f_2(z)=f_1(z)$，$z\in\Gamma_{12}$，则函数

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in D_1; \\ f_1(z)=f_2(z), & z\in\Gamma_{12}; \\ f_2(z), & z\in D_2 \end{cases} \tag{6}$$

是区域 $D=D_1+\Gamma_{12}+D_2$ 上的单值解析函数.

【证】 显然，三个集合 D_1、D_2 与 Γ_{12} 互不相交，且构成一个区域 $D=D_1+\Gamma_{12}+D_2$，因此函数 $F(z)$ 是区域 D 上的单值函数.

当 $z\in D_i(i=1,\ 2)$时，$F(z)=f_i(z)$，因此 $F(z)$解析．剩下只要证明：对于任意的 $z_0\in\Gamma_{12}$，函数 $F(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析．设 $z_0\in\Gamma_{12}$，显然存在闭圆 $|z-z_0|\leqslant\rho$，它完全属于 D．下面证明：对于圆 $|\zeta-z_0|<\rho$ 内的任意点 z，有

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad |z-z_0|<\rho. \tag{7}$$

为此，我们将(7)的积分路线分解为两个闭曲线 Γ_1 与 Γ_2 上的积分之和，其中 Γ_1 由属于 D_1 内的圆周 $|\zeta-z_0|=\rho$ 以及圆 $|\zeta-z_0|<\rho$ 内 Γ_{12} 上的弧所构成；Γ_2 由属于 D_2 内的圆周

$|\zeta-z_0|=\rho$ 以及圆 $|\zeta-z_0|<\rho$ 内 Γ_{12} 上的弧所构成. 这样，对任何 $z\bar{\in}\Gamma_{12}$，不妨设 $z\in D_1$，

$$r_1=\min(\rho-|z-z_0|,\ \min_{z^*\subset\Gamma_{12}}|z-z^*|),$$

则圆 $|\zeta-z|\leqslant\frac{r_1}{2}$ 就完全属于 D_1. 因此，应用柯西定理及柯西公式，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=\frac{r_1}{2}}\frac{f_1(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\\
&=f_1(z)=F(z).
\end{aligned}$$

同样可以证明，公式(7)对 $z\in D_2$ 也成立. 余下的还要证明公式(7)对于任何 $z_0\in\Gamma_{12}$ 也成立. 为此，对于任何 $z\in D_1$，考虑

$$\begin{aligned}
&F(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}F(\zeta)\frac{z_0-z}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}\,d\zeta.
\end{aligned}$$

由此利用第四章中证明高阶导数存在的方法，可以看出：当 $z\to z_0$ 时，右边积分的极限为零. 因此(7)对于 $z=z_0\in\Gamma_{12}$ 也成立.

再次利用证明高阶导数存在的方法，从公式(7)得到

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{F(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta,\quad |z-z_0|<\rho.$$

这就证明了 $F(z)$ 在 $z=z_0$ 处的解析性. ▌

定理2中的函数 $F(z)$ 也称为函数 $f_1(z)$ 越过区域 D_1 的

边界弧 Γ_{12} 到区域 $D=D_1+\Gamma_{12}+D_2$ 的解析开拓，或称函数 $f_2(z)$ 越过区域 D_2 的边界弧 Γ_{12} 到区域 $D=D_1+\Gamma_{12}+D_2$ 的解析开拓，或称函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 越过 Γ_{12} 互为解析开拓．根据唯一性定理，这种解析开拓也是唯一的．同上面一样，如果有了函数 $f_1(z)$ 及解析性区域 D_1，关键是要寻找区域 D_2 中的解析函数 $f_2(z)$ 及 D_1 与 D_2 的公共弧 Γ_{12}，它们满足定理 2 中的条件．如果这样的函数 $f_2(z)$ 及区域 D_2 可以找到的话，则就可以越过 D_1 的一部分边界进行解析开拓．

【例 5】 设 $f_1(z)=|z|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\arg z}{2}}$ $(0<\arg z<\pi)$；$f_2(z)=|z|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\arg z}{2}}$ $(\pi<\arg z<2\pi)$．这里区域 D_1 为上半平面，D_2 是下半平面，而 Γ_{12} 为负实轴．显然，函数

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z), & 0<\arg z<\pi; \\ f_1(z)=f_2(z)=i|z|^{\frac{1}{2}}, & \arg z=\pi; \\ f_2(z), & \pi<\arg z<2\pi. \end{cases}$$

在区域 $D=D_1+\Gamma_{12}+D_2$ 上解析．且显然 D 是区域 $0<\arg z<2\pi$．我们也可以将 $F(z)$ 写作 $f_1(z)=|z|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\arg z}{2}}$，只是在开拓后，其定义域已经是区域 $0<\arg z<2\pi$．它是多值函数 $w=\sqrt{z}$ 的一个单值解析的分支．

1.2 解析开拓的具体方法

上面的两个定理只是在原则上提供了两种解析开拓的方法．下面介绍两个具体的方法：

定理 3（黎曼-施瓦兹对称原理） 设区域 D_1 在上半平面上，它有一段边界 Γ_1 在实轴上，函数 $f_1(z)$ 在 D_1 内解析，在 $D_1+\Gamma_1$ 上连续，且在 Γ_1 上取实数值，则可以构成一个区域

D_2，它与 D_1 关于实轴对称，函数 $f_2(z)$：

$$f_2(z)=\overline{f_1(\bar{z})},\quad z\in D_2+\Gamma_1 \tag{8}$$

在 D_2 解析，在 $D_2+\Gamma_1$ 上连续，$f_2(z)=f_1(z)$，$z\in\Gamma_1$，且函数

$$F(z)=\begin{cases}f_1(z), & z\in D_1;\\ f_1(z)=f_2(z), & z\in\Gamma_1;\\ f_2(z), & z\in D_2\end{cases} \tag{9}$$

就是区域 $D=D_1+\Gamma_1+D_2$ 上的单值解析函数.

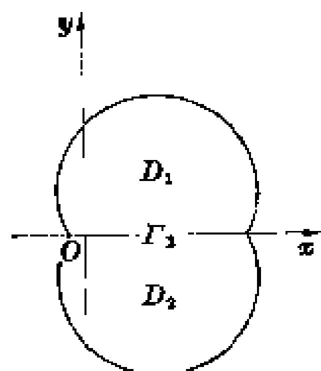


图 6 3

【证】 首先，三个集合 D_1、Γ_1 及 D_2 互不相交，且当 $z\in\Gamma_1$ 时，由函数 $f_2(z)$ 的定义式(8)及定理的条件，就有

$$f_2(x)=\overline{f_1(\bar{x})}=\overline{f_1(x)}=f_1(x).$$

因此，公式(9)确定了一个单值函数 $F(z)$.

设 $z_0\in D_2$，则 $\bar{z}_0\in D_1$，所以 $f_1'(\bar{z}_0)$ 存在. 因而有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f_2(z)-f_2(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{f_1(\bar{z})}-\overline{f_1(\bar{z}_0)}}{z-z_0}$$

$$=\overline{\lim_{\bar{z}\to\bar{z}_0}\left(\frac{f_1(\bar{z})-f_1(\bar{z}_0)}{\bar{z}-\bar{z}_0}\right)}=\overline{f_1'(\bar{z}_0)}.$$

这表示函数 $f_2(z)$ 在 D_2 中解析. 此外，当 $z_0\in\Gamma_1$ 时，有

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in D_2+\Gamma_1}}f_2(z)=\lim_{\substack{\bar{z}\to z_0\\ \bar{z}\in D_1+\Gamma}}\overline{f_1(\bar{z})}=\overline{f_1(\bar{z}_0)}=\overline{f_1(z_0)}$$

$$=f_1(z_0)=f_2(z_0).$$

这就证明了函数 $f_2(z)$ 在 $z=z_0\in\Gamma$ 的连续性.

最后，利用定理 2 就证明了此定理. 】

注 1 从函数 $f_2(z)$ 的定义式(8)看出：函数 $F(z)$ 在关于实轴的对称点上取到的值也关于实轴对称，因此这种开拓就称为**对称开拓**.

注 2 定理 3 还可以推广：设区域 D_1 是位于某条直线 C_1 的一边，D_1 有一段边界 Γ_1 在 C_1 上．又设函数 $f_1(z)$ 在 D_1 内解析，在 $D_1+\Gamma_1$ 上连续，且在 C_1 上的取值在 w 平面的某条直线 L_1 上，则函数 $f_1(z)$ 可以越过 C_1 解析开拓到 D_1 关于直线 C_1 对称的区域 D_2 中去，且开拓后的函数 $F(z)$ 在关于 C_1 的对称点上取的值关于直线 L_1 也对称．这个推广留给读者自己证明．定理 3 还可以推广到 C_1 与 L_1 都是圆弧的情况，这将在第七章中再论述这个问题．

下面再介绍另一种具体开拓的方法——幂级数开拓法：设函数 $f_1(z)$ 在区域 D_1 解析，$z_0\in D$，z_0 到 D 的边界 ∂D 的距离为

$$\rho(z_0)=\min_{z\in\partial D}|z-z_0|.$$

显然 $|z-z_0|<\rho(z_0)\in D$，且圆周 $|z-z_0|=\rho(z_0)$ 与边界 ∂D 至少相交于一个点．函数 $f_1(z)$ 在 $|z-z_0|<\rho(z_0)$ 解析，因而根据第三章第四节定理 3，它在 $z=z_0$ 处有展开式

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \tag{10}$$

且其收敛半径 $R\geqslant\rho(z_0)$．这里可分两种情况：

1) $R=\rho(z_0)$（图 6-4 a）．此时，由下面证明定理 4 及定

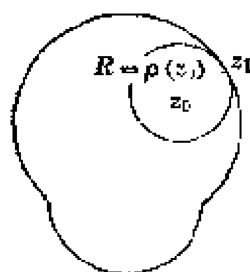


图 6-4 a

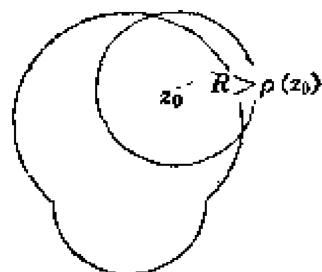


图 6-4 b

理5的方法可以看出：在 $|z-z_0|=\rho(z_0)$ 与边界 ∂D 的交集 Γ 上，至少存在一点 z_1，函数 $f_1(z)$ 不能经过 $z=z_1$ 的邻域由区域 D_1 解析开拓出去，即不存在 $z=z_1$ 的邻域 D_2 及 D_2 内的解析函数 $f_2(z)$，使得在 $D_1\cap D_2$ 上有 $f_2(z)=f_1(z)$。

2) $R>\rho(z_0)$（图 6-4 b）。此时函数 $f_1(z)$ 可以越过 Γ 解析开拓出去。因此，由幂级数(10)所确定的函数 $f_2(z)$ 就在圆 $|z-z_0|<R$ 内解析了，而这个圆包有 Γ 作为内点，也包有 D_1 的外点。此外，在 $D_1\cap|z-z_0|<R$ 上有 $f_2(z)=f_1(z)$。这是因为函数 $f_2(z)$ 及 $f_1(z)$ 都在 $D_1\cap|z-z_0|<R$ 内解析，在其子区域 $|z-z_0|<\rho(z_0)$ 上 $f_2(z)=f_1(z)$ 由唯一性定理所得到。这样一来，函数 $f_1(z)$ 就可以解析开拓到区域 $D_1\cup|z-z_0|<R$。

【例 6】 考虑例 2 中由幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z|<1$ 中所确定的函数 $f_1(z)=\frac{1}{1-z}$ 及区间(0, 1)中的任何点 x_0，显然有

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-x_0)-(z-x_0)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-x_0)^n}{(1-x_0)^{n+1}}. \tag{11}$$

其收敛半径 $R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{(1-x_0)^{n+1}}}}=1-x_0$.

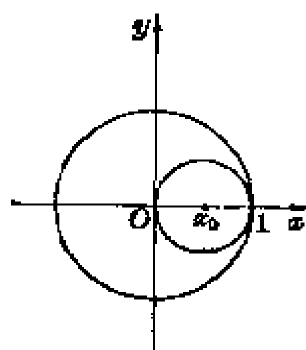


图 6-5 a

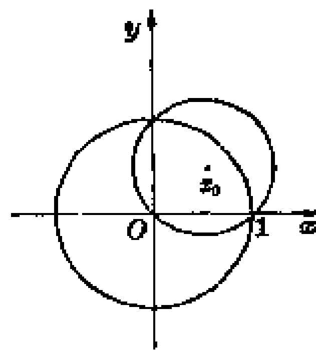


图 6-5 b

另一方面，$\rho(x_0)=1-x_0$. 因此 $R=\rho(x_0)$ 且 $|z-x_0|=1-x_0$ 与 $|z|=1$ 只相交于一点 $z=1$（见图 6–5 a）. 这是属于上面的第一种情况，因此函数 $\frac{1}{1-z}$ 不能在 $|z|<1$ 中经过 $z=1$ 的邻域开拓出去，这是很显然的. 现在再考虑其他任何点 $z_0\in[0,1)$，显然也有

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-z_0)-(z-z_0)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}. \qquad (12)$$

此时，幂级数(12)的收敛半径为

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{|1-z_0|^{n+1}}}}=|1-z_0|.$$

而 $\rho(z_0)=1-|z_0|$. 因为 $z_0\in[0,1)$，所以有 $R=|1-z_0|>1-|z_0|$（见图 6–5 b）. 这是属于上面第二种情况. 这样一来，函数 $f_1(z)=\frac{1}{1-z}$ 就可以通过圆 $|z-z_0|<|1-z_0|$ 从 $|z|<1$ 解析开拓出去了（见图 6–5 b），开拓后的函数 $F(z)=\frac{1}{1-z}$ 就在区域 $(|z|<1)\cup(|z-z_0|<|1-z_0|)$ 上解析.

这里对解析开拓后的函数 $F(z)=\frac{1}{1-z}$ 还可以再进行解析开拓，这样反复进行下去，容易得到函数 $\frac{1}{1-z}$ 在全平面上除了 $z=1$ 以外解析.

为了区别能够开拓出去的边界点及不能开拓出去的边界点，下面引进正则点及奇点的概念.

定义 2 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析. 对于区域 D 的边界 ∂D 上的任意点 z_0，若存在一个在 $z=z_0$ 的邻域 $|z-z_0|<\rho$ 上的解析函数 $\varphi_{z_0}(z)$，它在区域 $(|z-z_0|<\rho)\cap D$ 上取值等于 $f(z)$，则称 z_0 是函数 $f(z)$ 的正则点；若这样的解析函数

$\varphi_{z_0}(z)$不存在，则称 z_0 是函数 $f(z)$的奇点.

从定义可看出：若 z_0 是正则点，则函数 $f(z)$ 可以通过 $z=z_0$ 的邻域解析开拓出去. 这是因为区域 $D\cup(|z-z_0|<\rho)$ 包有 D 的外点，且函数

$$F(z)=\begin{cases}f(z), & z\in D;\\ \varphi_{z_0}(z), & |z-z_0|<\rho.\end{cases}$$

就在区域 $D\cup(|z-z_0|<\rho)$ 上解析. 从定义还可看出：正则点不是孤立的，因为 $(|z-z_0|<\rho)\cap\partial D$ 上的每一点都在区域 $D\cup(|z-z_0|<\rho)$中，所以每一点都是正则点；若 z_0 是 $f(z)$的奇点，则函数 $f(z)$ 就不能通过 z_0 的邻域开拓出去. 奇点可以是孤立的，如例 6 中的函数 $\frac{1}{1-z}$，$|z|<1$，就以 $z=1$ 为孤立奇点.

上述概念也适用于区域内点的情况. 若函数 $f(z)$在 $z=z_0$ 解析，则称 z_0 是它的正则点. 若 z_0 是 $f(z)$的孤立奇点，则当 z_0 是可去奇点时，它就可以看作是正则点；若 z_0 是极点或本性奇点时，则 z_0 是奇点.

对于在圆内的解析函数，有下面幂级数开拓的定理.

定理 4 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z-z_0|<\rho$ 内解析，$z_1\in|z-z_0|<\rho$，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}(z-z_1)^n. \tag{13}$$

则要使幂级数(13)的收敛半径 $R>\rho-|z_1-z_0|$ 的充要条件是点 $z_2=z_0+\rho e^{i\arg(z_1-z_0)}$ 是正则点.

【证】 必要性：设 $R>\rho-|z_1-z_0|$，则幂级数(13)的收敛圆 $|z-z_1|<R$ 中就包有点 $z_2=z_0+\rho e^{i\arg(z_1-z_0)}$ 作为内点，即包有 $|z-z_0|>\rho$ 中的点(见图 6-6). 设级数(13)在 $|z-z_1|<R$ 内闭一致收敛到解析函数 $F(z)$. 取 $z=z_2$ 的小邻域 $S(z_2)$，

使 $S(z_2)\subset(|z-z_1|<R)$，当 $z\in S(z_2)$时，取 $\varphi_{z_2}(z)=F(z)$. 设 $z\in d_1=(|z-z_0|<\rho)\cap S(z_2)$，现在证明 $\varphi_{z_2}(z)=f(z)$. 事实上，函数 $F(z)$ 与 $f(z)$ 都在区域 $d=(|z-z_0|<\rho)\cap(|z-z_1|<R)$ 上解析，在圆 $(|z-z_1|<\rho-|z_1-z_0|)\subset d$ 上有 $F(z)=f(z)$，因此根据唯一性定理，在 d 上就有 $F(z)=f(z)$. 由于 $d_1\subset d$，因而在 d_1 上就有 $\varphi_{z_2}(z)=F(z)=f(z)$. 这表示 z_2 是正则点.

充分性：设 z_2 为函数 $f(z)$ 的正则点，$|z_2-z_0|=\rho$，因此存在函数 $\varphi_{z_2}(z)$，它在 $|z-z_2|<\rho_2$ 上解析，且在 $d_2=(|z-z_0|<\rho)\cap(|z-z_2|<\rho_2)$ 上 $\varphi_{z_2}(z)=f(z)$. 这样一来，函数

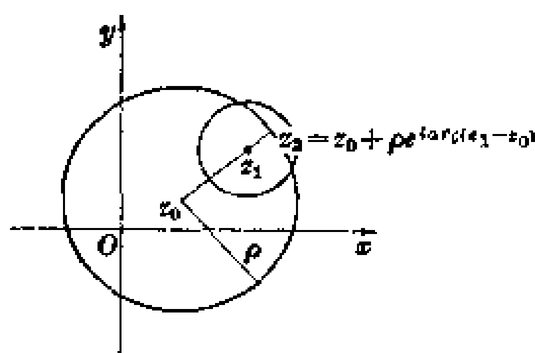


图 6-6

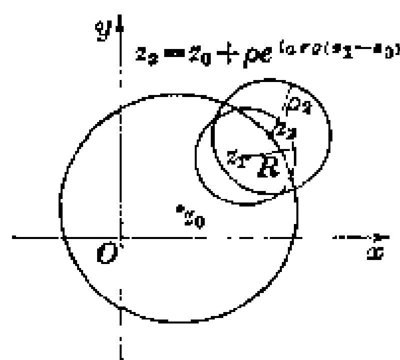


图 6-7

$$F(z)=\begin{cases} f(z), & |z-z_0|<\rho; \\ \varphi_{z_2}(z), & |z-z_2|<\rho_2. \end{cases}$$

就在区域 $D=(|z-z_0|<\rho)\cup(|z-z_2|<\rho_2)$ 解析. 显然存在圆 $|z-z_1|<R$，它包有 z_2 为其内点，且全部位于区域 D 中（见图 6-7）. 函数 $F(z)$ 在 $z=z_1$ 处的泰勒展开式的系数为

$$\frac{F^{(n)}(z_1)}{n!}=\frac{f^{(n)}(z_1)}{n!},$$

因而级数(13)的收敛半径就是 $F(z)$ 在 $z=z_1$ 处展开的泰勒级数的收敛半径. 它至少等于 R. 由于 $z_2\in|z-z_1|<R$，因而

(13)的收敛半径 $\geqslant R>\rho-|z_1-z_0|$. 】

推论 要使点 $z_2=z_0+\rho e^{i\arg(z_1-z_0)}$ 是奇点的充要条件是

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z_1)|}{n!}}}=\rho-|z_1-z_0|. \tag{14}$$

幂级数所确定的函数 $f(z)$ 在收敛圆周上是否每一点都是正则点呢？答案是否定的，这有下面的定理：

定理5 设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=f(z),\ |z-z_0|<\rho \tag{15}$$

的收敛半径是 ρ，则函数 $f(z)$ 在收敛圆周 $|z-z_0|=\rho$ 上必有奇点.

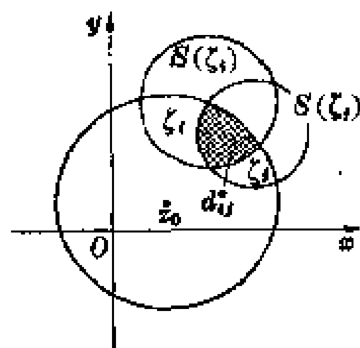


图 6-8

【证】 用反证法：设圆周 $|z-z_0|=\rho$ 上的每一点 $z=\zeta$ 都是正则点，则根据定义，存在 $z=\zeta$ 的邻域 $S(\zeta)$ 上的解析函数 $\varphi_\zeta(z)$，它在区域 $d_\zeta=(|z-z_0|<\rho)\cap S(\zeta))$ 上等于 $f(z)$. 所有这些圆 $S(\zeta)$ 的集合 $S=\{S(\zeta)\,|\,|\zeta-z_0|=\rho\}$ 就覆盖了圆周 $|z-z_0|=\rho$. 根据第一章中的覆盖定理，从 S 中可以选出有限个圆 $S(\zeta_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，它们全体仍然覆盖圆周 $|z-z_0|=\rho$. 这些圆可以相交，设 $S(\zeta_i)$ 与 $S(\zeta_j)$ 相交，记作 $d_{ij}=S(\zeta_i)\cap S(\zeta_j)$（见图 6-8）. 现在要证明

$$\varphi_{\zeta_i}(z)=\varphi_{\zeta_j}(z),\quad z\in d_{ij}\in S(\zeta_i)\cap S(\zeta_j).$$

事实上，当 $z\in S(\zeta_i)\cap(|z-z_0|<\rho)$ 时，$\varphi_{\zeta_i}(z)=f(z)$；当 $z\in S(\zeta_j)\cap(|z-z_0|<\rho)$ 时，$\varphi_{\zeta_j}(z)=f(z)$. 故当 $z\in d_{ij}^*=S(\zeta_i)\cap S(\zeta_j)\cap(|z-z_0|<\rho)$ 时，$\varphi_{\zeta_i}(z)=f(z)=\varphi_{\zeta_j}(z)$. 由于 $S(\zeta_i)$ 与 $S(\zeta_j)$ 相交，因此 d_{ij}^* 是非空的，且属于 d_{ij}. 根据唯一性定理，

在 d_{ij} 上就有 $\varphi_{\zeta_i}(z)=\varphi_{\zeta_j}(z)$.

这样一来，我们构造函数

$$F(z)=\begin{cases} f(z), & |z-z_0|<\rho; \\ \varphi_{\zeta_i}(z), & z\in S(\zeta_i) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \end{cases}$$

它就在区域 $D=(|z-z_0|<\rho)+\sum_{i=1}^{n}S(\zeta_i)$ 上单值解析．事实上，对于任何 $z\in D$，若 z 属于定义 D 的 $n+1$ 个区域中的任意几个区域中，则根据上面证明的事实，函数在这些区域上的值都相等，因此是单值函数．至于解析性，是显然的．

更显然地，区域 D 包有闭圆 $|z-z_0|\leqslant\rho$，因此包有一个比 $|z-z_0|<\rho$ 更大的圆 $|z-z_0|<\rho'$ $(\rho'>\rho)$．函数 $F(z)$ 在圆 $|z-z_0|<\rho'$ 中于 $z=z_0$ 处展开成泰勒级数的系数

$$a_n=\frac{F^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

即级数 (15) 的收敛半径 $R\geqslant\rho'>\rho$．而这与 ρ 是级数(15)的收敛半径的假设相矛盾．这说明了反证假设不对．从而定理得证．▌

应用解析开拓的概念可以看清一些事实的本质．如实函数

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

在整个实轴上有无穷多级导数，但它在 $x=0$ 处展开成泰勒级数

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad (|x|<1) \qquad (16)$$

时，其收敛半径却为 1，因为若其收敛半径 $R>1$，则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}=F(z)$$

就表示一个在 $|z|<R$ 中的解析函数了．显然，它在 $|z|<1$

上等于 $\frac{1}{1+z^2}$，因此 $F(z)=\frac{1}{1+z^2}$ 是函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 或函数 $\frac{1}{1+z^2}$ 从 $|z|<1$ 到 $|z|<R$ 的解析开拓. 但

$$\lim_{\substack{z\to\pm i\\|z|<1}} F(z)=\lim_{\substack{z\to\pm i\\|z|<1}}\frac{1}{1+z^2}=\infty,$$

这就违反了 $F(z)$ 在 $z=\pm i$ 处解析的事实. 因此，由于函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 在平面上的解析开拓 $\frac{1}{1+z^2}$ 在 $z=\pm i$ 处有奇点，才使得它的级数展开式(16)的收敛半径为1. 这个事实在实数域中是看不出来的. 因此，复变函数理论就使我们能更好地了解事物的本质.

下面举一例说明：不是任何一个解析函数都可以从它的定义域中解析开拓出去.

【例 7】 级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} \quad (|z|<1) \tag{17}$$

的收敛圆是 $|z|<1$，它所确定的函数 $f(z)$ 在收敛圆周 $|z|=1$ 上每个点都是它的奇点.

解：容易看出：若令 $c_m=1$，当 $m=2^n$ 时，$c_m=0$；当 $m\neq 2^n$ 时($n=0, 1, \cdots$)，则

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\sqrt[m]{c_m}}=1,$$

因此级数(17)的收敛半径为 1.

首先证明 $z=1$ 是 $f(z)$ 的奇点. 用反证法：假设不然，则存在 $z=1$ 的邻域 $S(1)$ 及 $S(1)$ 上的解析函数 $\varphi_1(z)$，它在 $S(1)\cap(|z|<1)$ 上等于 $f(z)$. 由此得

$$\lim_{\substack{z\to 1\\|z|<1}} f(z)=\lim_{\substack{z\to 1\\|z|<1}} \varphi_1(z)=\varphi_1(1). \tag{18}$$

另一方面，对级数(17)的任何部分和 $S_n(z)=1+z^2+z^{2^2}+\cdots+z^{2^n}$，有

$$\lim_{x\to1-0} S_n(x)=\lim_{x\to1-0}(1+x^2+x^{2^2}+\cdots+x^{2^n})=n+1.$$

因此，任给 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta(n)$，使得当 $x>1-\delta(n)$ 时，有 $1+x^2+x^{2^2}+\cdots+x^{2^n}>n$，因此 $f(x)>1+x^2+x^{2^2}+\cdots+x^{2^n}>n$，这就表示

$$\lim_{x\to1-0} f(x)=+\infty. \tag{19}$$

极限(19)是与(18)相矛盾的，因此 $z=1$ 是函数 $f(z)$ 的奇点.

现在证明 $z=1$ 的任何 2^N 次根 $\sqrt[2^N]{1}$ 也都是 $f(z)$ 的奇点. 事实上，

$$\begin{aligned} f(z)&=z^2+z^{2^2}+\cdots+z^{2^N}+1+z^{2^{N+1}}+z^{2^{N+2}}+\cdots \\ &=z^2+z^{2^2}+\cdots+z^{2^N}+1+(z^{2^N})^2+(z^{2^N})^{2^2}+\cdots \\ &=z^2+z^{2^2}+\cdots+z^{2^N}+f(z^{2^N}). \end{aligned} \tag{20}$$

因此，当 $z\to\zeta=\sqrt[2^N]{1}$ 时，即 $z^{2^N}\to1$ 时，就有

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in O_\zeta}} f(z^{2^N})=+\infty. \tag{21}$$

从而由(20)及(21)就得到

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in O_\zeta}} f(z)=\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in O_\zeta}} z^2+z^{2^2}+\cdots+z^{2^N}+f(z^{2^N})=+\infty.$$

这样一来，可以同上面一样，证明任何一个根 $\zeta=\sqrt[2^N]{1}$ 都是函数 $f(z)$ 的奇点. 由于 N 是任何自然数，所有的点 $e^{i\frac{2k\pi}{2^N}}$ $(k=0,1,\cdots,N-1; N=1,2,\cdots)$ 在圆周 $|z|=1$ 上稠密，因此圆周 $|z|=1$ 上的每一点都是 $f(z)$ 的奇点. ▌

习 题 6·1

1. 设函数 $\sin z$ 定义在 $|z|<1$ 上，试用两种方法将它解析开拓到全平面.

2. 实轴上的单值实函数$\sqrt{x^2}$能否解析开拓到复平面上去?

3. 试证明定理 3 的注 2.

4. 设区域 D 的边界上有一段直线段 Γ, 函数$f(z)$在 D 内解析, 在 $D+\Gamma$ 上连续,且当 $z\in\Gamma$ 时,$f(z)=0$. 试证明$f(z)\equiv0$.

*5. 设区域 D_1 在实轴的一边,其边界有一段为实轴上的线段 Γ. 若函数 $u(x, y)$ 在区域 D_1 内调和, 在 $D_1+\Gamma$ 上连续, 且当 $z\in\Gamma$ 时, $u(x, y)=0$. 求证: 函数 $u(x, y)$可以经过 Γ 调和地开拓到 D_1 关于线段 Γ 所对称的区域 D_2 上去, 即存在区域 $D_1+\Gamma+D_2$ 上的调和函数,它在 $D+\Gamma$ 上的值等于 $u(x, y)$.

6. 证明函数

$$f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}z^{n!}$$

在收敛圆周 $|z|=1$ 上每点都是奇点.

[提示: 考虑点 $e^{2\pi i\frac{p}{q}}$, 其中 p 与 q 是正整数,这些点都是奇点.]

7. 证明函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2^n+2}}{(2^n+2)(2^n+1)}$$

不能从 $|z|<1$ 解析开拓出去.

[提示: 考虑逐项导数.]

第二节　完全解析函数与黎曼曲面

2.1 完全解析函数的概念

若函数在区域 D 内解析, 且区域 D 的边界 ∂D 上每一点都是它的奇点, 则它就不能越过区域 D 的任意一部分边界解析开拓; 若在 ∂D 上有正则点, 则此函数就可以越过边界 ∂D 解析开拓出去. 对开拓后得到的函数及区域, 还可以再研究它能否进一步解析开拓. 这样, 就可以不断地解析开拓, 一直到不能开拓为止. 为了刻划这个事实, 需要引进**完全解析函**

数及自然边界这两个概念. 为此首先引入解析元素的概念:

定义 1 设函数 $f(z)$ 在中心为 $z=z_0$ 点、半径为 r 的圆 $S_r(z_0)$ 内解析, 则称 $\{S_r(z_0), f(z)\}$ 为一个解析元素. 或者更一般地, 设函数 $f(z)$ 在凸区域 G*) 内解析, 则称 $\{G, f(z)\}$ 为一个解析元素. 两个解析元素 $\{G_1, f_1(z)\}$ 与 $\{G_2, f_2(z)\}$ 当且仅当 $G_1=G_2, f_1(z)=f_2(z)$ 时, 才认为相等.

定义 2 1) 设有两个解析元素 $\{G_1, f_1(z)\}$、$\{G_2, f_2(z)\}$, 若 G_1 与 G_2 的交集 d 是非空的, 且在 d 上 $f_1(z)=f_2(z)$, 则称 $\{G_1, f_1(z)\}$ 或 $\{G_2, f_2(z)\}$ 中的任意一个解析元素为另一个的直接开拓, 或称它们互为直接开拓.

如果存在有限个解析元素 $\{G_i, f_i(z)\}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, 它们依次地互为直接开拓, 且 $G_1=G$, $f_1(z)\equiv f(z)$, $\cdots$, $D=G_n$, $f_n(z)\equiv\varphi(z)$. 则称两个解析元素 $\{G, f(z)\}$ 与 $\{D, \varphi(z)\}$ 互为间接开拓. 有时也称这两个解析元素中的任意一个为另一个的间接开拓. 显然, 间接开拓包含直接开拓, 有时统称为解析开拓.

2) 若两个解析元素 $\{G_1, f_1(z)\}$ 与 $\{G_2, f_2(z)\}$ 中的区域 G_i $(i=1, 2)$ 除了有一段公共边界 Γ(Γ 可以认为是逐段光滑曲线)以外, 不相交, 且 $f_i(z)$ 在 $G_i+\Gamma$ 上连续 $(i=1, 2)$, 在 Γ 上有 $f_1(z)=f_2(z)$, 则也称这两个解析元素互为直接开拓. 类似地也可以引入间接开拓的概念.

【例 1】 考虑函数

$$f_k(z)=\ln|z|+i\arg z,$$

$$\frac{k-1}{2}\pi<\arg z<\frac{k+1}{2}\pi \quad (k=1, 2, 3, 4, 5). \qquad (1)$$

---

*) 设 E 为一集合, 若 $z_1\in E$, $z_2\in E$, z_1 与 z_2 的联线 $\overline{z_1z_2}$ 也属于 E, 则称 E 为凸集.

显然，它们依次地互为直接开拓．$\{0<\arg z<\pi,\ f_1(z)\}$与

$$\left\{\frac{3}{2}\pi<\arg z<\frac{5}{2}\pi,\ f_4(z)\right\}$$

就互为间接开拓了．这样，尽管在第一象限上对应同一点，函数 $f_1(z)$ 与 $f_4(z)$ 的取值可以不等．如果按定义 2 中的 2) 来理解：解析元素 $\{0<\arg z<\pi,\ f_1(z)\}$ 与 $\{\pi<\arg z<2\pi,\ f_3(z)\}$、$\{2\pi<\arg z<3\pi,\ f_5(z)\}$ 就依次地互为直接开拓，而 $\{0<\arg z<\pi,\ f_1(z)\}$ 及 $\{2\pi<\arg z<3\pi,\ f_5(z)\}$ 就可以看作互为间接开拓．

从例 1 看出：通过间接开拓，就可以得到多值函数．

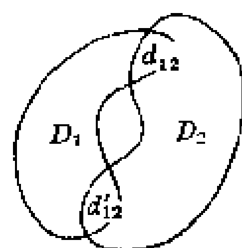


图 6-9

如果稍微改变一下定义 1，开拓以后也可以得到多值函数．设区域 D_1 与 D_2 的交集 $d=D_1\cap D_2$ 是由两个连通区域 d_{12} 与 d'_{12} 所组成(见图 6-9)，函数 $f_i(z)$ 在 D_i $(i=1,\ 2)$ 上解析，且在 d_{12} 上，$f_1(z)=f_2(z)$．考虑函数

$$F_1(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in D_1-d_{12};\\ f_1(z)=f_2(z), & z\in d_{12};\\ f_2(z), & z\in D_2-d_{12}-\overline{d'_{12}}, \end{cases}$$

其中 $\overline{d'_{12}}$ 是 d'_{12} 加上其凝聚点的全体所构成的点集．显然函数 $F_1(z)$ 在区域 $D_1+D_2-\overline{d'_{12}}$ 上单值解析．但若考虑函数

$$F_2(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in D_1-d_{12};\\ f_1(z)=f_2(z), & z\in d_{12};\\ f_2(z), & z\in D_2-d_{12}, \end{cases} \tag{2}$$

则它在区域 $D=D_1+D_2$ 上就不一定是单值函数了．这是因为当 $z\in d'_{12}$ 上时，函数 $F_2(z)$ 可以取值 $f_1(z)$，也可以取值 $f_2(z)$，且若 $f_1(z)\neq f_2(z)$时，就得到两个值．如在例 1 中，设

$D_1=\{0<\arg z<\pi\}$，函数 $f_1(z)=\ln|z|+i\arg z$；区域

$$D_2=\left\{\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{5}{2}\pi\right\},$$

函数 $f_2(z)=\ln|z|+i\arg z$，则在第二象限上，它们的值相等，但是在第一象限上，它们的值不等．因而由 (2) 确定的函数 $F_2(z)$ 在第一象限上就得两个值，这样就得到了多值函数．

在上述情况下，我们仍然可以研究其解析性质，这只要预先规定 $F_2(z)$ 在 d'_{12} 上的值是函数 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 中的一个就可以了，这样它也就在 d'_{12} 上解析了．在这种意义下来理解函数 $F_2(z)$ 的解析性质当然就比较复杂了．我们可以设想：把函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 取值相同的区域粘合起来，而对函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 取值不同的那些区域不加粘合，看作两层．这样构成的"广义区域"就称为曲面．在这样设想的情况下，设在 d'_{12} 上 $f_1(z)\neq f_2(z)$，则在 d'_{12} 上就有两层．在第一层上规定 $F_2(z)=f_1(z)$；在第二层上规定 $F_2(z)=f_2(z)$．在这样的规定下，函数 $F_2(z)$ 就在上述的曲面上单值解析了．对于例 1 中的函数，在第二象限上，把函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 的定义域粘合起来；在第一象限上，由于 $f_1(z)\neq f_2(z)$，故看作两层．这样就得到一个曲面

$$0<\arg z<\frac{5}{2}\pi,$$

函数 $F_2(z)=\ln|z|+i\arg z$ 在上述意义下才是一个单值解析函数．

利用上面所讨论的一些想法，下面引进完全解析函数及黎曼曲面的概念：

定义 3 设有解析元素 $\{G_1, f_1(z)\}$，考虑它的全部间接开拓后得到的解析元素的集合 Y，Y 称为由解析元素 $\{G_1,$

$f_1(z)\}$所生成的完全解析函数,记作 $F(z)$. 这个函数的定义域为 $R=\bigcup G$, 其中 G 是解析元素 $\{G_1, f_1(z)\}$ 经过间接开拓后得到的解析元素$\{G, f(z)\}\subset Y$ 所对应的区域; 记号"$\bigcup$"是对所有的 G 求和. 对于任意点 $z_0\in R$, 规定函数 $F(z)$ 在 $z=z_0$ 处的函数值如下: 考察 Y 中的解析元素 $\{G, f(z)\}$ 所对应的区域 G, 只要有一个 $z_0\in G$, 则 z_0 所对应的 $f(z_0)$就是 $F(z)$ 在 $z=z_0$ 处的一个值, 全部 $f(z_0)$的集合就是 $F(z)$ 在 $z=z_0$ 处所取得的值. $F(z)$ 的定义域 R 的边界称为完全解析函数的自然边界.

例如: 解析元素

$$\left\{|z|<1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n\right\}$$

的完全解析函数就是

$$F(z)=\frac{1}{1-z},$$

其定义域 R 是全平面上除去 $z=1$ 后的区域, 故 $z=1$ 是自然边界; 而第一节例 7 中的解析元素

$$\left\{|z|<1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}\right\}$$

的完全解析函数

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n},$$

其定义域 R 是 $|z|<1$, 则 $|z|=1$ 是自然边界.

一般来说, 完全解析函数可能是多值函数. 在下一节中将介绍如何用解析开拓的方法得到多值函数$\sqrt[n]{z}$与 $\ln z$ 及其自然边界等问题. 下面证明:

定理 1 任何一个完全解析函数的定义域 R 都是区域.

【证】 先证 R 是由内点组成的: 设 $z_0\in R$, 则 z_0 必属于

Y 中某一个解析元素 $\{G, f(z)\}$ 所对应的区域 G. 因而必存在 z_0 的邻域属于 G. 但 $G\subset R$, 因此这个邻域也必属于 R, 故 z_0 是 R 的内点.

再证 R 的连通性: 设 z_0 与 Z 是 R 中的两个点, 则 z_0 必属于 Y 中某个解析元素 $\{G, f(z)\}$ 所对应的区域 G; 而 Z 必属于 Y 中某个解析元素 $\{G^*, f^*(z)\}$ 所对应的区域 G^*. 按定义, 解析元素 $\{G, f(z)\}$ 与 $\{G^*, f^*(z)\}$ 都是原来确定这个完全解析函数的解析元素的间接开拓, 因此它们也必互为间接开拓. 所以存在有限个解析元素 $\{G_i, f(z)\}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, 其中相邻两个互为直接开拓, 且 $G_1=G$, $f_1(z)=f(z)$; $G_n=G^*$, $f_n(z)=f^*(z)$. 按定义, 所有的 G_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 都属于 R. 现在分别在 G_i 与 G_{i+1} 的交集中取一个点 $z_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$. 由于 $z_0\in G=G_1$, $z_1\in G_1\cap G_2$, 因此由区域 G_1 的性质知, 必存在折线 $l_1\subset G_1$ 连接 z_0 与 z_1; 同样, 因为 $z_1\in G_2$, $z_2\in G_2\cap G_3$, 所以也必存在折线 $l_2\subset G_2$ 连接 z_1 与 z_2. 这样一直下去, 用数学归纳法可以证明: 最后必存在折线 $l_n\subset G_n=G$ 联接 z_n 与 Z. 这样一来, 折线 $l_1l_2\cdots l_n$ 全部位于 R 中, 且联接 z_0 与 Z. ▌

2.2 黎曼曲面的概念

下面一般地引进黎曼(Riemann)曲面的概念:

定义 4 对于上面引进的完全解析函数 $F(z)$ 及其定义域 R, 设 z 是 $R=\cup G$ 中的任意点, 且 Y 中有解析函数 $\{G, f(z)\}$ 所对应的区域 $G\supset z$, 则称 $\{z, f(z)\}$ 是一个黎曼点. 当 Y 中可能有很多个解析元素所对应的区域包有 z 时, 对于同一点 $z\in R$, 就可以有很多个黎曼点. 考虑所有的点 $z\in R$ 所对应的全体黎曼点的集合 S. 对于 S 中的任何两个黎曼点

$\{z_1, f_1(z)\}$ 与 $\{z_2, f_2(z)\}$，当且仅当 $z_1=z_2$, $f_1(z)=f_2(z)$ 时，才认为这两个点相等. 这样的集合 S 称为完全解析函数 $F(z)$的黎曼曲面.

我们可以具体地构造一个黎曼曲面：对应于 Y 中的每一个解析元素 $\{G, f(z)\}$ 可以用一张纸截出一个区域 G，对应于 Y 中所有的解析元素，就可得到所有的由这样方法截出的区域 G. 任取 $R=\bigcup G$ 上的一个点 z，若在 z 所属的一些解析元素 $\{G, f(z)\}$ 所对应的区域 G 上所对应的函数值 $f(z)$ 都相等，则就认为截出的这些区域 G 在点 z 处是完全粘合的；若对应的函数值不同，则就不加以粘合. 通过这种粘合规则所得到的"曲面"就是黎曼曲面的具体体现. 显然，对于区域 $R=\bigcup G$ 上的每一个点 z，可能有很多层纸在此点重迭，甚至可能有无穷多张纸在此点重迭. 这样一来，在黎曼曲面上，完全解析函数 $F(z)$就是一个单值解析函数了，因为对于黎曼曲面上的每一个点，就只对应一个解析元素 $\{G, f(z)\}$ 所对应的包含此点的区域 G，而函数 $f(z)$在此点解析. 有时也称黎曼曲面的边界为此解析函数的自然边界.

上一节例 7 中函数的完全解析函数的黎曼曲面就是 $|z|<1$，且只有一层.

下面研究$\sqrt[n]{z}$、$L_n z$ 及其他几个初等函数的黎曼曲面：

【例 2】 求由解析元素

$$\{0<\arg z<\pi,\ f_1(z)=|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z}{n}}\} \quad (n \text{ 是自然数})$$

所确定的完全解析函数及其黎曼曲面.

解：用解析元素$\{0<\arg z<\pi, f_1(z)\}$ 所有可能的解析开拓来构造完全解析函数. 根据解析开拓的唯一性，它们可以由下列解析开拓来实现：

$$f_2(z)=|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z}{n}},\quad \frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3}{2}\pi;$$

$$f_3(z)=|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z}{n}},\quad \pi<\arg z<2\pi;$$

$$f_4(z)=\begin{cases}|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z}{n}}, & \frac{3}{2}\pi<\arg z\leqslant 2\pi;\\ |z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z+2\pi}{n}}, & 0<\arg z<\frac{\pi}{2};\end{cases}$$

$$f_5(z)=|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z+2\pi}{n}},\quad 0<\arg z<\pi.$$

更一般地有

$$f_{4j+2}(z)=|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z-2j\pi}{n}},\quad \frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3}{2}\pi;$$

$$f_{4j+3}(z)=|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z+2j\pi}{n}},\quad \pi<\arg z<2\pi;$$

$$f_{4(j+1)}(z)=\begin{cases}|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z+2j\pi}{n}}, & \frac{3}{2}\pi<\arg z\leqslant 2\pi;\\ |z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z+2(j+1)\pi}{n}}, & 0<\arg z<\frac{\pi}{2};\end{cases}\tag{3}$$

$$f_{4(j+1)+1}(z)=|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z+2(j+1)\pi}{n}},\quad 0<\arg z<\pi$$

$$(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\quad 且\quad j=-1,\ -2,\ \cdots).$$

显然，后一个函数是前一个的直接开拓．设 $j\geqslant 0$，注意到当 $j=n-1$ 时，在区域

$$0<\arg z<\frac{\pi}{2}$$

上，就有

$$f_{4(j+1)}(z)=f_{4(j+1)+1}(z)=|z|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\arg z+2n\pi}{n}}=f_1(z).$$

再往下开拓，完全是重复 $f_2(z)$、$f_3(z)$、$\cdots$ 等．所以只需要考虑 $j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ (n-1)$ 所对应的全部解析元素即可．而这又等价于在平面 $0<\arg z\leqslant 2\pi$ 上对应着的 n 个值

$$|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z+2j\pi}{n}}\quad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ (n-1)).\qquad (4)$$

对于 $j<0$ 的情况，也可以化到(4)所对应的 n 个值. 这样所得到的区域 $R=\cup G$ 就是扩充平面上除去 $z=0$ 及 $z=\infty$ 后的区域，完全解析函数就是 n 值函数 $\sqrt[n]{z}$，其自然边界为 $z=0$ 及 $z=\infty$. 从(4)还可知道，它在 $0<\arg z<2\pi$ 上有 n 个单值解析分支，且是函数 $z=w^n$ 的反函数.

为了要得到多值函数 $\sqrt[n]{z}$ 的黎曼曲面，对应于(3)上每一个函数的定义域，可以截取一个半平面. 由于函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 在第二象限上的值相等，因此就可以将这两个半平面在第二象限上粘合起来，这样就可以得到一个区域，它就是前三个象限(见图 6-10). 由于函数 $f_2(z)$ 与 $f_3(z)$ 在第三象限上的值相等，因此可以将图 6-10 中的第三象限与 $f_3(z)$ 所对应的下半平面在第三象限上粘合起来，这样就得到全平面除去正实轴的区域 D_1. 由于函数 $f_3(z)$ 与 $f_4(z)$ 在第四象限上的值相同，但在第一象限上的值不同，因此可以将区域 D_1 的第四象限与函数 $f_4(z)$ 所对应的右半平面上的第四象限粘合起来，但是不能将它们的第一象限粘合起来，因此，在这里它们的函数值不等. 这样一来，在第一象限上一共就有两层了. 这样反复地进行下去，一直到函数 $f_{4n}(z)$，由于它所对应的右半平面上在第一象限处的值与 $f_1(z)$ 所对应的上半平面在第一象

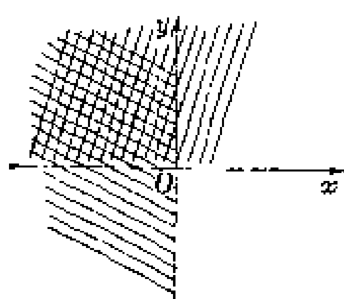


图 6-10

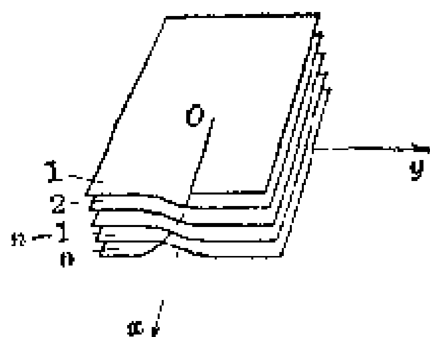


图 6-11

限上的值相等，因此也可以认为这两部分在第一象限上也是粘合的.当然,这种粘合在实际上是不可能的,因为从构造可以看出：它们中间隔着 $n-1$ 层.这样就得到了函数 $\sqrt[n]{z}$ 的黎曼曲面，它是由 n 层全平面除去 $z=0$ 的区域粘合而成的（见图 6-11）．这个黎曼曲面在扩充平面上的自然边界为 $z=0$ 及 $z=\infty$．函数 $\sqrt[n]{z}$ 在此黎曼曲面上就是一个单值解析函数了．

我们也可以用下面的方式来构造解析开拓：

$$
\begin{aligned}
f_2(z) &= |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg z}{n}}, \quad \pi<\arg z<2\pi; \\
f_{2j+1}(z) &= |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg z+2j\pi}{n}}, \quad 0<\arg z<\pi; \qquad (5)\\
f_{2(j+1)}(z) &= |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg z+2j\pi}{n}}, \quad \pi<\arg z<2\pi \\
&(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).
\end{aligned}
$$

这里后一个解析元素也是前一个的解析开拓，不过这是按本节定义 2 中的第二种意义来理解的．同样可看出：当 $j\geqslant n$ 或 j 取负整数时的解析元素与 $j=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ 中的一个解析元素完全一样，因此就只要考虑 $j=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ 就够了．这样也可以得到完全解析函数 $\sqrt[n]{z}$．

为了构造它的黎曼曲面，只要将边界上取值相同的两个函数在它们所对应的这一段边界上接起来即可．如函数 $f_1(z)$ 与(5)中函数 $f_2(z)$ 在 $\arg z=\pi$ 上的值相等,则就将 $f_1(z)$ 所对应的上半平面与 $f_2(z)$ 所对应的下半平面在负实轴 $\arg z=\pi$ 上接起来，这样就得到了一个全平面除去正实轴的区域 D_1．类似地，可将 $f_2(z)$ 所对应的下半平面边界上的一段 $\arg z=0$ 与 $f_3(z)$ 所对应的上半平面边界上的一段 $\arg z=0$ 接起来．但是,由于 $f_3(z)$ 与 $f_1(z)$ 在上半平面上的值不等，所以 $f_3(z)$ 所对应的上半平面与 $f_1(z)$ 所对应的上半平面不能粘合

起来．这样在上半平面上就有两层了．如此不断地一直进行下去，直到 $f_{2n}(z)$ 所对应的下半平面在正实轴上的值与 $f_1(z)$ 所对应的上半平面在正实轴上的值相等．因此也可以设想：它们在正实轴上也是可以粘合起来的．当然，在实际上，这是不可能的，因为中间相隔了 $n-1$ 层．这样得到的黎曼曲面与上面所得到的黎曼曲面是完全一样的，其自然边界也是 $z=0$ 及 $z=\infty$．$\sqrt[n]{z}$ 在不同层上就确定了不同的解析分支．我们称正实轴为平面的割线，不同的单值解析分支在割线上互相连接起来．当然也可任取一条从 $z=0$ 出发到 $z=\infty$ 的简单曲线为割线．

【例 3】 求由解析元素

$$\{0<\arg z<\pi,\ g_1(z)=\ln|z|+i\arg z\}$$

确定的完全解析函数及其黎曼曲面．

解：由解析元素

$$\{0<\arg z<\pi,\ g_1(z)\}$$

直接开拓可以是

$$g_2(z)=\ln|z|+i\arg z,\quad \pi<\arg z<2\pi.$$

$g_1(z)$ 与 $g_2(z)$ 在负实轴 $\arg z=\pi$ 上的值相等．依次地可以写出直接开拓

$$g_{2j+1}(z)=\ln|z|+i(\arg z+2j\pi),\quad 0<\arg z<\pi,$$
$$g_{2(j-1)}(z)=\ln|z|+i(\arg z+2j\pi),\quad \pi<\arg z<2\pi$$
$$(j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots). \tag{6}$$

这里与例 2 不同，由于它们的值都不相同，所以 j 可以取任何整数值．显然，这样开拓出来的完全解析函数就是对称函数 $w=\ln z$，其自然边界是 $z=0$ 及 $z=\infty$．

下面构造 $\ln z$ 的黎曼曲面．由于 $g_1(z)$ 与 $g_2(z)$ 在负实轴上的极限值相等，因此可以将 $g_1(z)$ 所对应的上半平面与

$g_2(z)$所对应的下半平面在负实轴相连接，得到全平面除去正实轴的区域 D_1. 由于 $g_2(z)$ 与 $g_3(z)$ 在正实轴上的极限值相等，所以可将 $g_2(z)$所对应的下半平面与 $g_3(z)$ 所对应的上半平面在正实轴上相连接. 但是由于 $g_3(z)$ 与 $g_1(z)$在上半平面上的值不同，因此上半平面不能粘合，就得到两层. 这样不断地进行下去，就得到了无穷多层. 同样，当 j 取负整数时，从另外一个方向也得到了无穷多层. 因此，其黎曼曲面就是除了 $z=0$ 及 $z=\infty$ 外的无穷多层全平面. 函数 $\operatorname{Ln} z$ 就在不同层上确定了不同的解析分支. 如果沿正实轴作割线，则不同的单值解析分支在割线上也相互连接起来. 我们也可以任取别的连接 $z=0$ 及 $z=\infty$ 的简单曲线为割线.

现在我们从任意点 $z=z_0\neq 0$ 出发，在 z 平面上沿着任意一条闭曲线 C 按逆时针方向绕行一圈再回到 $z=z_0$，假设在 $z=z_0$ 处已经取定了 $\sqrt[n]{z}$ 的一个分支，当 z 在曲线 C 上绕行时，所取到的值看作从 $z=z_0$ 处的值出发不断地进行解析开拓后得到的值. 实际上这个值完全由 $\ln|z|$ 及 $\arg z$ 的值的变化所决定. 当 z 在 C 上从 $z=z_0$ 出发绕行一圈回到 $z=z_0$ 时，$\ln|z|$ 没有变化，因此完全由 $\arg z$ 的值所决定. 当曲线 C 的内部不包有原点时，则当 z 在 C 上绕行一圈回到出发点 $z=z_0$ 时，$\arg z$ 没有变化，因此$\sqrt[n]{z}$没有变化；当 C 的内部包有原点时，则当 z 在 C 上绕行一圈回到出发点 $z=z_0$ 时，$\arg z$ 的值就增加了 $\pm 2\pi$，因此$\sqrt[n]{z}$的值也变化，它从一个分支值转到另一个分支值（见图 6–12）. 这个事实也可以从函数$\sqrt[n]{z}$的黎曼曲面上的变化看出来. 当 z 从黎曼曲面上的一点 $z=z_0$ 出发，绕闭曲线 C 回到原来这一层上的 $z=z_0$ 时，函数值不起变化，若回到另一层上的 $z=z_0$ 时，其函数值就起变化了.

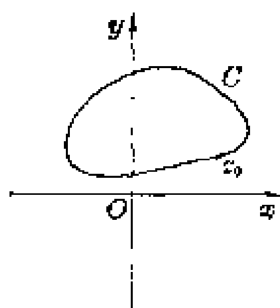


图 6-12 a

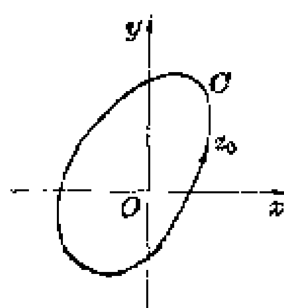


图 6-12 b

对于函数 $\mathrm{Ln}\,z$ 也有上述这样的现象. 因此引入下面的定义:

定义 5 设函数 $f(z)$ 定义在某点 $z=z^*$ 但除去此点的邻域中, 且从 $z=z^*$ 的小邻域中的某点 $z=z_0$ 出发, 函数 $f(z)$ 可以沿着闭曲线 C 解析开拓. 若闭曲线 C 的内部包有 z^*, 且绕行后的值 $f(z)$ 与原来的值不同, 则称 $z=z^*$ 是函数 $f(z)$ 的一个支点. 若绕行了 n 圈后又得到了原来的值, 则称 $z=z^*$ 是 $f(z)$ 的 $n-1$ 级代数支点. 若不管怎样绕圈, 函数值 $f(z)$ 总是不同, 则称 $z=z^*$ 是超越支点.

从公式(3)可以看出: $z=0$ 及 $z=\infty$ 是函数 $\sqrt[n]{z}$ 的 $n-1$ 级代数支点, 且在平面上再也没有其他支点了. 同样, 从公式(6)可看出: $z=0$ 及 $z=\infty$ 是 $\mathrm{Ln}\,z$ 的超越支点, 且在平面上也没有其他支点.

【例 4】 求多值函数 $\sqrt{1-z^2}$ 的支点及黎曼曲面.

解: 考虑函数 $\sqrt{1-z^2}$ 的一支

$$(\sqrt{1-z^2})_0=|1-z^2|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\arg(1-z)+\arg(1+z)}{2}}, \tag{7}$$

其中 z 在上半平面上变化, 规定

$$-\pi<\varphi_1=\arg(1-z)<0,\ 0<\varphi_2=\arg(1+z)<\pi. \tag{8}$$

显然, 当 z 从上半平面上的任何点 $z=z_0$ 出发, 沿着闭曲

线 C 按逆时针方向绕行一圈回到 z_0 时，不管曲线 C 在哪里，只要不经过 $z=0$，函数 $(\sqrt{1-z^2})_0$ 总是可以进行解析开拓的．若 C 不绕行 $z=1$ 或 $z=-1$，则幅角 $\varphi_1=\arg(1-z)$ 及 $\varphi_2=\arg(1+z)$ 不发生变化，因此函数值 $(\sqrt{1-z^2})_0$ 在开拓后也不发生变化．但当曲线 C 只绕行 $z=1$ 而回到 z_0 时，幅角 $\varphi_1=\arg(1-z)$ 增加 2π，而 $\varphi_2=\arg(1+z)$ 不发生变化，因此原来的函数值 $(\sqrt{1-z_0^2})_0$ 增加了幅角 π，即函数值发生了变化．当 C 只绕行 $z=-1$ 而回到 $z=z_0$ 时，幅角 $\varphi_1=\arg(1-z)$ 不增加，而 $\varphi_2=\arg(1+z)$ 增加 2π，因此原来的函数值 $(\sqrt{1-z_0^2})_0$ 的幅角也增加了 π，所以也使函数值发生变化．因而 $z=\pm1$ 都是这个函数的支点．如果再绕 $z=1$ 或 $z=-1$ 一圈，则对应的函数值的幅角又增加 π，因此在两次绕行后，函数值不变，所以 $z=\pm1$ 都是函数的一级支点．如果闭曲线按逆时针方向同时绕两个点 $z=\pm1$，则由于 $\varphi_1=\arg(1-z)$ 及 $\varphi_2=\arg(1+z)$ 都增加 2π，所以函数值不变，由此也看出 $z=\infty$ 不是它的支点(见图 6-13)．

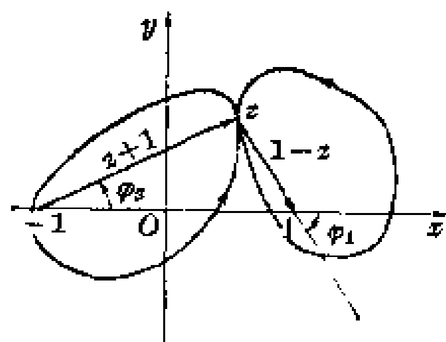


图 6-13

根据上面的讨论可以看出：为了要在平面上得到一个单值解析分支，我们可以考虑在全平面上除去直线段 $[-1,1]$ 后的区域 D_1，也可以考虑在全平面上除去射线 $(-\infty,-1]$ 及 $[1,+\infty)$ 后的区域 D_2，解析元素(7)与(8)就可以单值地从上半平面解析开拓到区域 D_1 (或 D_2)，因为在区域 D_1 上，不管 z 如何绕闭路，函数值不会发生变化．此时有

$$\lim_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im}z>0,\,x\in(-1,1)}}(\sqrt{1-z^2})_0=|1-x^2|^{\frac{1}{2}}$$

及 $$\lim_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im} z<0, x\in(-1,1)}} (\sqrt{1-z^2})_0 = |1-x^2|^{\frac{1}{2}} e^{i\pi} = -|1-x^2|^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

同样，可以考虑 $\sqrt{1-z^2}$ 的另一个分支

$$(\sqrt{1-z^2})_1 = |1-z^2|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\arg(1-z)+\arg(1+z)+2\pi}{2}}, \tag{10}$$

其中 z 在上半平面上变化时，规定

$$-\pi<\varphi_1=\arg(1-z)<0,\quad 0<\varphi_2=\arg(1-z)<\pi.$$

它同样可以单值解析开拓到区域 D_1(或 D_2)，此时有

$$\lim_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im} z>0, x\in(-1,1)}} (\sqrt{1-z^2})_1 = |1-x^2|^{\frac{1}{2}} e^{i\pi} = -|1-x^2|^{\frac{1}{2}}$$

及 $$\lim_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im} z<0, x\in(-1,1)}} (\sqrt{1-z^2})_1 = |1-x^2| e^{i2\pi} = |1-x^2|. \tag{11}$$

从极限关系式(10)与(11)看出：函数 $(\sqrt{1-z^2})_0$ 从上半平面趋向于 $x\in(-1,1)$ 时的极限值等于函数 $(\sqrt{1-z^2})_1$ 从下半平面趋向于 $x\in(-1,1)$ 时的极限值；函数 $(\sqrt{1-z^2})_0$ 从下半平面趋向于 $x\in(-1,1)$ 时的极限值等于函数 $(\sqrt{1-z^2})_1$ 从上半平面趋向于 $x\in(-1,1)$ 时的极限值．因此这两个分支互为解析开拓．为了要构造 $\sqrt{1-z^2}$ 的黎曼曲面，只要将 $(\sqrt{1-z^2})_0$ 对应的区域 D_1 的边界 $(-1,1)$ 的下沿与 $(\sqrt{1-z^2})_1$ 对应的 D_1 的边界 $(-1,1)$ 的上沿相接；将 $(\sqrt{1-z^2})_0$ 对应的区域 D_1 的边界 $(-1,1)$ 的上沿与 $(\sqrt{1-z^2})_1$ 对应的 D_1 的边界 $(-1,1)$ 的下沿相接，就能够得到 $\sqrt{1-z^2}$ 的黎曼曲面．当然，后一种相连接在实际上是不可能的，因为中间相隔了一层，但是我们仍然设想它们可以连接起来．这个黎曼曲面的自然边界为 $z=\pm1$ 及 $z=\infty$。$z=\pm1$ 是一级支点，$z=\infty$ 不是支点。

习 题 6·2

1. 求$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ ($|z|<1$) 的完全解析函数及其自然边界.
2. 如何在全平面上除去两条射线$[1, +\infty)$, $(-\infty, -1]$后的区域中找出$\sqrt{1-z^2}$的两个单值解析分支? 并用这两个分支来构造黎曼曲面、自然边界及支点.
3. 求$z^a \triangleq e^{a\operatorname{Ln} z}$的分支及黎曼曲面.

第三节 利用多值函数进行积分计算

我们在第四章中应用留数定理来计算实轴上的定积分时,常常将被积函数解析开拓到上半平面(或一个适当的区域上),使得开拓后的函数在闭上半平面上除去一些点外连续. 但是在有些定积分中,会出现x^{p-1} ($0<p<1$)或$\ln x$等之类的被积函数,它们在开拓后,不可能完全满足上面的要求. 这就需要适当地改变一下处理方法. 有时候,还需要利用一些多值函数的单值解析分支来进行研究. 这样就可以解决一些比较复杂的函数的积分了. 下面我们就几个比较典型的积分来进行研究.

1) 形如$\int_0^{+\infty} x^{p-1}f(x)dx$ ($0<p<1$)的积分计算

在积分中,函数$f(z)$定义在正实轴上且能保证积分收敛. 设函数$f(x)$可以单值地解析开拓到全平面上,记为$f(z)$,但至多除去有限个不在正实轴上的孤立奇点z_i($i=1, 2, \cdots, n$). 为了保证这个积分在无穷远处的收敛性,还需设$f(z)$以$z=\infty$至少为一级零点,且

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) \tag{1}$$

存在.

为了用复变函数方法来计算积分，首先考虑解析函数

$$\varphi(z)=z^{p-1}f(z)=e^{(p-1)(\ln|z|+i\arg z)}f(z)\quad(0<\arg z<2\pi). \tag{2}$$

它在全平面上除去正实轴的区域上单值解析．显然有

$$\lim_{\substack{z\to x\in(0,+\infty)\\ \operatorname{Im} z>0}}\varphi(z)=e^{(p-1)\ln x}f(x)=x^{p-1}f(x) \tag{3}$$

及

$$\lim_{\substack{z\to x\in(0,+\infty)\\ \operatorname{Im} z<0}}\varphi(z)=e^{(p-1)(\ln x+2\pi i)}f(x)=x^{p-1}e^{(p-1)2\pi i}f(x). \tag{4}$$

选择一条闭路，使得一方面在这条闭路上 $\varphi(z)$ 的积分值可以用留数定理计算出来；另一方面，在这条闭路上有一段积分与原来的函数在正实轴上的积分密切有关，而另一段积分在此闭路过渡到极限时也容易计算出来．这样就能解决上述问题．为此，选取闭路 Γ_{Rr} 为(参看图 6–14a)：以原点为中心、半径为 r 的小圆周 C_r，按顺时针方向绕行，加上正实轴上的区间$[r, R]$，在积分时将函数值看作由第一象限趋向于正实轴时的极限值(见公式(3))；再以原点为中心、半径为 R 的大圆周 C_R，按逆时针方向绕行，加上正实轴上的区间$[r, R]$(但从 R 变到 r)，在积分时将函数值看作由第四象限趋向于正实轴时的极限值（见公式(4)）．如果认为这样的取法不习惯的话，则可以取闭路 $\Gamma_{R,r,\delta}$(参看图 6–14b)：$C_{r,\delta}$——从 C_r 与 $\operatorname{Im} z=-\delta<0$ 的交点 $z_{r,\delta}$ 出发，沿 C_r 的顺时针方向到 C_r 与 $\operatorname{Im} z=0$ 的交点 r，加上直线段$[r,R]$；以及 $C_{R,\delta}$——从 $z=R$ 出发，沿 C_R 的逆时针方向绕行到 C_R 与 $\operatorname{Im} z=-\delta<0$ 的交点 $z_{R,\delta}$，再从 $z=z_{R,\delta}$ 出发，沿着 $z=-\delta$ 回到 $z_{r,\delta}$．显然，$\Gamma_{R,r,\delta}$ 构成一条闭路，且当 $\delta\to0$ 时，$\Gamma_{R,r,\delta}\to\Gamma_{R,r}$．今后，在考虑多值函数的解析分支的积分时，都是从这种意义来理解的，以后就

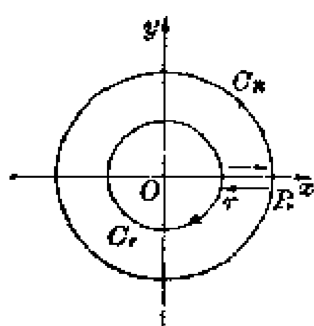


图 6-14a

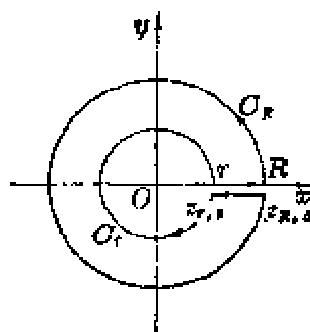


图 6-14b

不再作说明了.

显然,当 r 充分小、R 充分大时,函数 $\varphi(z)=z^{p-1}f(z)$ 的孤立奇点也是 $z_i(1\leqslant i\leqslant n)$, 且它们全部位于 $\Gamma_{R,r}$ 所围的区域中. 根据第五章中的留数定理,注意到(3)与(4),则有

$$\int_{\substack{|z|=r\\ \text{顺时针}}} z^{p-1}f(z)dz+\int_r^R x^{p-1}f(x)dx+\int_{\substack{|z|=R\\ \text{逆时针}}} z^{p-1}f(z)dz$$

$$+\int_R^r e^{(p-1)2\pi i}x^{p-1}f(x)dx=2\pi i\sum_{i=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_i} z^{p-1}f(z). \tag{5}$$

在(5)式的两边取极限 $r\to 0$、$R\to+\infty$,就得到

$$\lim_{r\to 0}\int_{\substack{|z|=r\\ \text{顺时针}}} z^{p-1}f(z)dz+(1-e^{(p-1)2\pi i})\int_0^{+\infty} x^{p-1}f(x)dx$$

$$+\lim_{R\to+\infty}\int_{\substack{|z|=R\\ \text{逆时针}}} z^{p-1}f(z)dz=2\pi i\sum_{i=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_i} z^{p-1}f(z). \tag{6}$$

由于函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 解析, 因此有界, 即存在数 r_1 与 M_1,当 $|z|\leqslant r_1$ 时,有 $|f(z)|\leqslant M_1$. 因而,当 $r<r_1$ 时,就有

$$\left|\int_{\substack{|z|=r\\ \text{顺时针}}} z^{p-1}f(z)dz\right|\leqslant M_1r^{p-1}2\pi r=2\pi M_1 r\to 0. \tag{7}$$

此外, 由前面条件(1)知, 存在数 R_1 及 M_2, 使 $R>R_1$ 时, 有 $|f(z)|\leqslant\dfrac{M_2}{|z|}$, 因此

$$\left|\int_{\substack{|z|=R\\ \text{逆时针}}} z^{p-1} f(z)dz\right| \leqslant \frac{M_2}{R} R^{p-1} 2\pi R = \frac{2\pi M_2}{R^{1-p}} \to 0. \tag{8}$$

这样一来，比较(6)、(7)与(8)，最后得到

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} f(x)dx = \frac{2\pi}{(1-e^{2\pi p i})}\sum_{i=1}^{n} \underset{z=z_i}{\operatorname{Res}}\,(z^{p-1}f(z)). \tag{9}$$

【例 1】 求 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx \quad (0<p<1)$.

解：函数 $\frac{x^{p-1}}{1+x}$ 满足上面所讲到的一切条件．事实上，函数

$$f(z)=\frac{1}{1+z}$$

在全平面上除去 $z=-1$ 外解析，且

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z}{1+z}=1.$$

应用公式(9)，就得到

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx &= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi p i}}\underset{z=-1}{\operatorname{Res}}\frac{e^{(p-1)\ln z}}{1+z}\\ &= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi p i}}e^{(p-1)(\ln|-1|+i\arg(-1))} = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi p i}}e^{(p-1)\pi i}\\ &= \frac{\pi}{\sin p\pi}\quad (0<p<1).\end{aligned} \tag{10}$$

熟悉 Γ 函数的读者知道(或参看下一节)，由(10)得到

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}\quad (0<p<1). \tag{11}$$

2) 形如 $\int_0^{+\infty} f(x)\ln x\,dx$ 的积分计算

这里，设 $f(x)$ 是偶函数，且可以解析开拓到上半平面上，把开拓后的函数用 $f(z)$ 表示，它在上半平面上至多有有限个

孤立奇点 $z=z_i(1\leqslant i\leqslant n)$，且存在数 $\delta>0$，使得

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ \operatorname{Im} z\geq 0}} z^{1+\delta}f(z)=0. \tag{12}$$

对于函数 $f(z)\ln z$，我们考虑在闭路 $\Gamma_{R,\rho}$ 上的积分，其中 $\Gamma_{R,\rho}$ 由下面几部分组成（参看图 6-15）：以原点为中心、半径为 ρ 的上半个圆周 C_ρ，按顺时针方向绕行，加上正实轴区间 $[\rho, R]$，再以原点为中心、半径为 R 的大圆周 C_R，按逆时针方向绕行，加上负实轴上从 $-R$ 到 $-\rho$ 的区间. 当 ρ 充分小、R 充分大时，可以认为 $\Gamma_{R,\rho}$ 的内部包有函数 $f(z)\ln z$ 的全部孤立奇点 $z=z_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$.

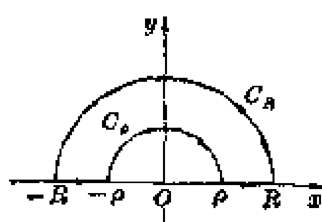


图 6-15

应用第五章中的留数定理，注意到在负实轴上有

$$\ln z=\ln|x|+\pi i,$$

得到

$$\int_{\Gamma_{R\rho}} f(z)\ln z dz=\int_{C_\rho} f(z)\ln z dz+\int_\rho^R f(x)\ln x dx$$

$$+\int_{C_R} f(z)\ln z dz+\int_{-R}^{-\rho} f(x)(\ln|x|+\pi i)dx$$

$$=2\pi i\sum_{i=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_i}(f(z)\ln z).$$

因为 $f(x)$ 是偶函数，因此在上式两边取极限后，得到

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\ln z dz+2\int_0^{+\infty} f(x)\ln x dx$$

$$+\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\ln z dz+\pi i\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

$$=2\pi i\sum_{i=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_i}(f(z)\ln z). \tag{13}$$

由于函数在 $z=0$ 处连续，因此存在数 ρ_1 及 M_1，使得当

$|z|\leqslant\rho_1$ 时，就有 $|f(z)|\leqslant M_1$. 因而，当 $\rho\leqslant\rho_1$ 时，得到

$$\left|\int_{C_\rho} f(z)\ln z\,dz\right|\leqslant M_1[|\ln\rho|+\pi]2\pi\rho\to 0. \qquad (14)$$

此外，由条件(12)知，存在数 R_1 及 M_2，使得当 $|z|=R\geqslant R_1$ 时，有

$$|f(z)|\leqslant\frac{M_2}{|z|^{1+\delta}}.$$

因此，当 $R\geqslant R_1$ 时，就有

$$\left|\int_{C_R} f(z)\ln z\right|\leqslant\frac{M_2}{R^{1+\delta}}2\pi R=\frac{2\pi M_2}{R^\delta}\to 0. \qquad (15)$$

比较(13)、(14)及(15)，就得到

$$2\int_0^{+\infty} f(x)\ln x\,dx+\pi i\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

$$=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\underset{z=z_i}{\mathrm{Res}}\,(f(z)\ln z). \qquad (16)$$

对于积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$，用与上面相同的方法，可以得到

$$2\int_0^{+\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\underset{z=z_i}{\mathrm{Res}}\,f(z). \qquad (17)$$

由此，根据(16)与(17)，最后得到

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ln x\,dx=\pi i\sum_{i=1}^{n}\underset{z=z_i}{\mathrm{Res}}\left(f(z)\left[\ln z-\frac{\pi i}{2}\right]\right). \qquad (18)$$

【例 2】 求

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx.$$

解：函数

$$f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

是偶函数，它可以解析开拓到上半平面，得到

$$f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^2}.$$

显然，它在上半平面上只有 $z=i$ 是二级极点，且满足条件(12)，其中可取 $\delta=1$. 这样一来，应用公式(18)，得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx=\pi i\operatorname*{Res}_{z=i}\left(\frac{1}{(1+z^2)^2}\left[\ln z-\frac{\pi i}{2}\right]\right)$$

$$=\pi i\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\left[\ln z-\frac{\pi i}{2}\right]\right)$$

$$=\pi i\lim_{z\to i}\left(\frac{-2}{(z+i)^3}\left[\ln z-\frac{\pi i}{2}\right]+\frac{1}{(z+i)^2}\cdot\frac{1}{z}\right)$$

$$=\pi i\left(\frac{-2}{(2i)^3}\left[\frac{\pi i}{2}-\frac{\pi i}{2}\right]+\frac{1}{(2i)^2}\frac{1}{i}\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

3) 带有根式的函数的积分

【例 3】 计算积分

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}.$$

解：从以前的讨论知道，为了应用复变函数论中的方法计算这个积分，必需构造一个解析函数，它是被积函数

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}$$

在复平面上的解析开拓. 此外，还要选择一条闭路，这条闭路包有原来的积分路线$[-1, 1]$，使得函数$g(z)$在$[-1, 1]$上积分时，就可以得到所需要的积分值，而在这条闭路的其他部分上积分时，这个积分或者能比较容易地计算出来，或者在取极限后，能容易地算出其极限值. 关于函数 $g(z)$，自然地会取

$$g(z)=\frac{1}{\sqrt[3]{(1-z)(1+z)^2}},$$

它是一个多值函数. 为了取出其单值解析分支，对于 $1-z$ 及 $1+z$ 这两个向量，当 z 在上半平面上变化时，规定

$$\varphi_1=\arg(1-z)\quad(-\pi<\varphi_1<0)$$

及 $$\varphi_2=\arg(1+z)\quad(0<\varphi_2<\pi)$$
(见图 6-16)，且
$$\sqrt[3]{(1-z)(1+z)^2}=|1-z|^{\frac{1}{3}}|1+z|^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\varphi_1+2\varphi_2}{3}}. \qquad (19)$$

现在我们要把 $g(z)$ 解析开拓到下半平面上. 容易看出，当 z 按逆时针方向只绕 $z=-1$ 一圈后，$\varphi_1=\arg(1-z)$ 不变，$\varphi_2=\arg(1+z)$ 增加 2π，因此(19)中的幅角增加 $\frac{4\pi}{3}$；当 z 按逆时针方向只绕 $z=1$ 一圈后，$\varphi_1=\arg(1-z)$ 增加 2π，而 $\varphi_2=\arg(1+z)$ 不变. 因此(19)中的幅角增加了 $2\pi/3$. 由此看出：$z=\pm1$ 都是函数 $g(z)$ 的支点，且当按顺时针方向同时绕 $z=1$ 及 $z=-1$ 一圈后，函数 $g(z)$ 的幅角共增加

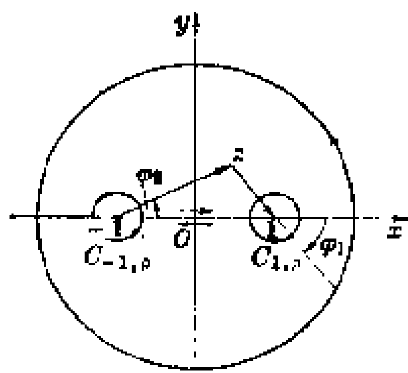


图 6-16

$$-\frac{4\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=-2\pi,$$

即函数值不变. 这样，我们就可以在平面上作出割线 $[-1,1]$，在除去割线 $[-1,1]$ 后的区域 D_1 中，函数 $g(z)$ 就可以连续地开拓到区域 D_1，而得到 D_1 上的单值解析函数. 此外，根据上面的规定，还有

$$\lim_{\substack{z\to x\in(-1,1)\\ \operatorname{Im}z>0}} g(z)=\frac{1}{|1-x|^{\frac{1}{3}}|1+x|^{\frac{2}{3}}} \qquad (20)$$

及
$$\lim_{\substack{z\to x\in(-1,1)\\ \operatorname{Im}z<0}} g(z)=\frac{1}{|1-x|^{\frac{1}{3}}|1+x|^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{4}{3}\pi}}. \qquad (21)$$

这两个极限值只相差一个常数因子. 因此，我们自然地会选取闭路 $\Gamma_{\rho,R}$，它由两部分构成：一部分是 $|z|=R$，按逆时针方

向绕行，另一部分是由4条曲线组成（参看图6-16）：$C_{-1,\rho}$——以 $z=-1$ 为中心、半径为 ρ 的圆周，按顺时针方向绕行，加上区间 $[-1+\rho, 1-\rho]$ 的上沿；$C_{1,\rho}$——以 $z=1$ 为中心、半径为 ρ 的圆周，按顺时针方向绕行加上区间 $[-1+\rho, 1-\rho]$ 的下沿（但从 $1-\rho$ 变到 $-1+\rho$）．应用第三章中的柯西定理，注意到极限关系式(20)及(21)，就得

$$\int_{C_R} g(z)dz+\int_{C_{-1,\rho}} g(z)dz+\int_{-1+\rho}^{1-\rho} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}$$
$$+\int_{C_{1,\rho}} g(z)dz+\int_{1-\rho}^{1+\rho} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}e^{i\frac{4}{3}\pi}}=0. \tag{22}$$

由于在 $C_{-1,\rho}$ 上，函数 $\frac{1}{\sqrt[3]{(1-z)}}$ 有界，即存在数 ρ_1 及 M_1，使当 $|z|\leqslant\rho_1$ 时，

$$\left|\frac{1}{\sqrt[3]{(1-z)}}\right|\leqslant M_1.$$

因此当 $\rho\leqslant\rho_1$ 时，有

$$\left|\int_{C_{-1,\rho}} g(z)dz\right|\leqslant M_1\int_{C_{-1,\rho}}\left|\frac{1}{\sqrt[3]{(1+z)^2}}\right||dz|$$
$$=M_1\frac{1}{\rho^{\frac{2}{3}}}2\pi\rho=2\pi M_1\rho^{\frac{1}{3}}\to 0. \tag{23}$$

同理有

$$\left|\int_{C_{1,\rho}} g(z)dz\right|\to 0. \tag{24}$$

为了求 $\int_{C_R} g(z)dz$，需要知道函数 $g(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域内罗朗展开式中 $\frac{1}{z}$ 的系数．因为当 $x>1$ 时，$\varphi_1=\arg(1+x)=0$，$\varphi_2=\arg(1-x)=-\pi$，所以由(19)得到 $\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}$ 的幅角为

$-\frac{\pi}{3}$，即当 $x>1$ 时，

$$g(x)=\frac{1}{xe^{-\frac{\pi}{3}i}}\left|1-\frac{1}{x}\right|^{-\frac{1}{3}}\left|1+\frac{1}{x}\right|^{-\frac{2}{3}}. \tag{25}$$

现在考虑函数

$$G(z)=\frac{1}{ze^{-\frac{\pi}{3}i}}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-\frac{2}{3}}, \tag{26}$$

其中规定

$$\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{3}}=|z-1|^{-\frac{1}{3}}e^{i\left(-\frac{1}{3}\right)\arg(z-1)}|z|^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i}{3}\arg z}, \tag{27}$$

$$\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-\frac{2}{3}}=|z+1|^{-\frac{2}{3}}e^{i\left(-\frac{2}{3}\right)\arg(z+1)}|z|^{\frac{2}{3}}e^{\frac{2}{3}i\arg z}, \tag{28}$$

其中 $\varphi_3=\arg(z-1)$，$\varphi_4=\arg z$，$\varphi_2=\arg(z+1)$ 由图 6–17 所示．从上述讨论可知：由公式(27)所确定的函数在全平面上除去割线 $[0, 1]$ 的区域上是单值解析函数，由(28)所确定的函数在全平面上除去割线 $[-1, 0]$ 的区域上也是单值解析函数．这样一来，由(26)及(27)、(28)看出：函数 $G(z)$ 就在全平面上除去割线 $[-1, 1]$ 的区域 D_1 上单值解析．此外，当 $z=x>1$ 时，$\varphi_3=\arg(z-1)=0$，$\varphi_4=\arg z=0$，$\varphi_2=\arg(z+1)=0$，因而从(26)看出

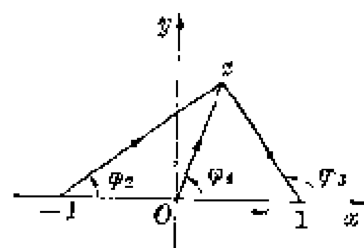


图 6–17

$$G(x)=\frac{1}{xe^{-\frac{\pi}{3}i}}|x-1|^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}|x+1|^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{xe^{-\frac{\pi}{3}i}}\left|1-\frac{1}{x}\right|^{-\frac{1}{3}}\left|1+\frac{1}{x}\right|^{-\frac{2}{3}},$$

从而与(25)比较，就得到当 $x>1$ 时，$G(x)=g(x)$．根据解析函数的唯一性定理，在区域 D_1 上就有 $G(z)\equiv g(z)$．

由 $G(z)$ 的表示式可看出：

$$c_{-1}=\lim_{z\to\infty} zG(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{\pi}{3}i}}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-\frac{2}{3}}=e^{\frac{\pi}{3}i}. \tag{29}$$

因而，由无穷远点的留数求法，得到

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} g(z)dz=\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} G(z)dz=2\pi i e^{\frac{\pi}{3}i}. \tag{30}$$

这样一来，在等式(22)中两边取极限 $\rho\to 0$, $R\to+\infty$, 注意到(23)、(24)及(30)，就得到

$$2\pi i e^{\frac{\pi}{3}i}+\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}dx$$

$$+\int_{1}^{-1}\frac{e^{-i\frac{4}{3}\pi}}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}dx=0.$$

从而得到

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}dx=-\frac{2\pi i e^{\frac{\pi}{3}i}}{e^{-\frac{4}{3}\pi i}-1}=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

习　题　6·3

1. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$　($a\neq 0$ 实数);

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+1)^2}dx$;

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}dx$　($a\neq 0$ 实数);

(5) $\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}}$.

第六章小结

1．解析开拓是研究解析函数性质的重要方法，它有很多重要的应用．这里除了原则上给出了两个解析开拓的方法外，还介绍了用幂级数及对称原理进行解析开拓的两个具体方法．此外，为了说明解析函数可以越过其定义域的边界上哪一个点解析开拓出去，引进了正则点及奇点的概念，同时给出了一个解析函数的例子，它的定义域的边界上每一点都是奇点，即不能越过边界解析开拓出去的例子．

2．为了更好地研究解析开拓后的函数，引进了解析元素以及它的直接开拓及间接开拓的概念，从而得到了完全解析函数及自然边界的概念．为了进一步研究完全解析函数的定义域，引进了黎曼点的概念，而全体黎曼点的集合就是黎曼曲面．完全解析函数在它的黎曼曲面上确定了一个单值解析函数．利用解析开拓的思想可以更好地了解解析函数的本质，可以深刻地理解实函数中无法理解的事实，例如函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 在全实轴上有无穷多阶导数，但是它在 $x=0$ 处的泰勒级数展开式却只能有收敛半径为 1．

3．多值解析函数类是一个重要的函数类，这里需要很好地弄清它的每一个分支是如何选取的．利用多值解析函数可以进一步计算较为复杂函数的定积分值，这里需要注意适当地选取一个闭路及弄清楚在闭路的每一部分上函数的取值．

第六章复习讨论题

1．将函数进行解析开拓有几种方法？试各举一例．

2. 求函数 $f(z)=\int_0^{+\infty} te^{-zt}dt$ 的定义域，它能否解析开拓到左半平面上？

3. 完全解析函数与自然边界是怎样定义的？试举两个例子来说明.

4. 黎曼曲面是怎样定义的？试求多值函数$\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ $(0<k<1)$的黎曼曲面.

5. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 1 $(c_n\geqslant 0)$，试证明 $z=1$ 是奇点.

6. 对于下列函数，从解析开拓的观点来看，哪些是单值函数？哪些是多值函数？若是多值函数，则构造其黎曼曲面：

   (1) $\sqrt[4]{e^z}$；　　　　(2) $\sqrt{z^2}$；

   (3) $\sqrt{\cos z}$；　　　　(4) $\sqrt{\sin z}$.

7. 计算下列定积分：

   (1) $\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}dx \quad (-1<p<2)$；

   (2) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$；　　　　(3) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$；

   (4) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+a)(\ln^2 x+\pi^2)} \quad (a>0)$.

   $\left[提示：考虑 \frac{1}{(z+a)(\ln z-\pi i)}.\right]$

第七章

解析函数的几何理论

设函数 $w=f(z)$ 定义在 z 平面的某个集合 E 上，它所取到的全部函数值所构成的集合称为值域，记作 E'. 这样就可以将函数 $w=f(z)$ 看作是 z 平面上的集合 E 到 w 平面上 E' 的一个变换或映射. 在这一章中，我们将研究解析函数的变换特性. 特别地，当 E 是区域时，则解析函数 $w=f(z)$ 就能把区域 E 变到区域 E'; 反过来，如果给了两个区域 E 及 E', 则在一定条件下，也必存在一个解析函数，它把区域 E 变到区域 E', 并且还能实现双方单值的变换. 这样一来，就可以把在比较复杂的区域上所研究的一些问题转化到比较简单的区域上研究. 这种方法，在解决各种实际问题（如流体力学、电学、磁学等）中有重要的应用；在解决各种广泛的理论问题中，也被广泛利用.

第一节 保形变换的概念及性质

1.1 解析函数所构成的变换

首先证明，解析函数一定把区域变成区域.

定理1 设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，$f(z)\neq c$, 则它一定把区域 D 变到某个区域 G.

【证】 设 G 是函数 $w=f(z)$ 的值域. 我们证明：1) G 由内点所组成；2) G 是连通集合.

首先证明 1)：考虑集合 G 上的任意点 $w_0\in G$, 由于 G 是

函数 $w=f(z)$ 的值域，因此必存在点 $z_0\in D$，使 $w_0=f(z_0)$．由于 D 是区域，因此必存在 z_0 的邻域 $S_\rho(z_0)$：$|z-z_0|<\rho$，使得闭圆 $\overline{S_\rho(z_0)}\in D$．根据第四章中的零点孤立性定理，可以认为，$f(z)-w_0$ 在闭圆 $\overline{S_\rho(z_0)}$ 上除了 $z=z_0$ 外，再也没有其他零点了．这样，由于函数 $f(z)$ 在 $S_\rho(z_0)$ 的边界 $|z-z_0|=\rho$ 上连续且 $f(z)\neq w_0=f(z_0)$，因此根据第一章中的连续函数在闭集上可以达到最小模的性质，存在数 $\delta>0$，使得

$$|f(z)-f(z_0)|\geqslant\delta,\qquad |z-z_0|=\rho. \tag{1}$$

因此，若将函数 $w=f(z)$ 在 $|z-z_0|=\rho$ 上所对应的值域记作 γ，则由(1)可知，曲线 γ 上任何一点 w 到 $w_0=f(z_0)$ 的距离 $\geqslant\delta$，即在 γ 内部包有一个圆 K_{w_0}：$|w-w_0|<\delta$（见图 7-1）．

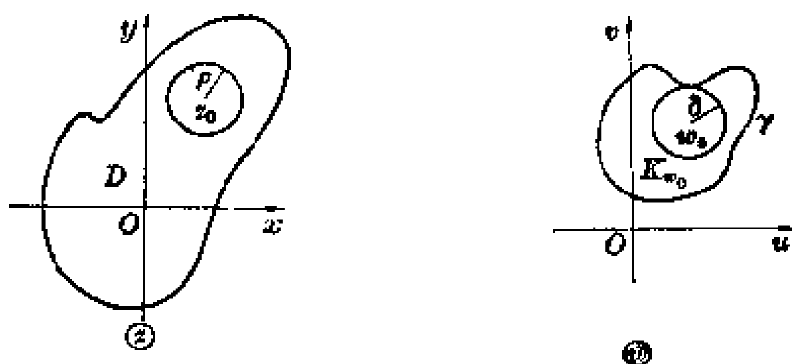


图 7-1

现在证明：圆 K_{w_0} 内任何一点 w^*（$|w^*-w_0|<\delta$）必是由 $S_\rho(z_0)$ 内的点经过函数 $w=f(z)$ 变过来的．事实上，由于(1)，得

$$|f(z)-f(z_0)|\geqslant\delta>|w^*-w_0|,\qquad |z-z_0|=\rho. \tag{2}$$

应用第五章中的鲁歇定理，从不等式(2)可知，函数

$$\begin{aligned}f(z)-w^*&=f(z)-f(z_0)+f(z_0)-w^*\\&=f(z)-f(z_0)+w_0-w^*\end{aligned}$$

与函数 $f(z)-f(z_0)$ 在圆 $S_\rho(z_0)$ 内的零点的个数是一样的，即

有一个零点. 因此, 存在 $z^*\in S_\rho(z_0)$, 使 $f(z^*)=w^*$. 这说明了圆 $|w-w_0|<\delta$ 必属于值域 G, 因此 G 是由内点所构成的.

现在证明 2): 设 w_1 与 w_2 是 G 内的任意两点, 因此必存在点 $z_1\in D$、$z_2\in D$, 使得 $w_1=f(z_1)$、$w_2=f(z_2)$. 由于 D 是区域, 因此在 D 内必存在折线 l, 连接 z_1 与 z_2. 设曲线 l 在变换 $w=f(z)$ 下的像为 L. 显然, 曲线 $L\in G$ 且连接 w_1 与 w_2. 最后, 从曲线 L 容易作出折线 $L'\in G$, 它也连接 w_1 与 w_2. ▌

我们已经知道, 解析函数一定将区域变到区域, 但是这种变换不一定是双方单值的. 例如函数 $w=z^2$ 将全平面变到全平面, 但是对 w 平面上任何一点 $w_0=|w_0|e^{i\arg w_0}$, 显然就有 z 平面上的两个值 $|w_0|^{\frac{1}{2}}e^{i\left(\frac{\arg w_0-2k\pi}{2}\right)}(k=0,\ 1)$ 与之相对应. 但是在很多理论及实际问题中需要的是双方单值的变换. 为此, 我们引入下面的概念:

定义 1 设函数 $w=f(z)$ 定义在集合 E 上, 其值域记作 E'. 若对 E' 上任何点 w, 在 E 上只存在一个点 z, 使 $w=f(z)$, 则称这个函数实现双方单值变换. 如果满足上述性质的集合 E 是区域, 且函数 $f(z)$ 在区域 E 上解析, 则称函数 $f(z)$ 为单叶解析函数, 简称单叶函数.

怎样才能保证一个函数是一个单叶函数呢? 或者说, 怎样才能保证在区域中解析函数有单值反函数呢? 首先我们应想到微积分学中的多元函数的隐函数存在定理. 设

$$w=f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y),$$

则

$$\begin{cases}u=u(x,\ y),\\ v=v(x,\ y)\end{cases}\tag{3}$$

就将 z 平面上的点 $(x,\ y)$ 变到 w 平面上的点 $(u,\ v)$. 因此, 为了应用隐函数存在定理来解出方程(3)的单值反函数, 常常假

设变换(3)的雅可比行列式不为零：

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

现在设函数 $w=f(z)$ 是区域 D 中的解析函数，因此，从柯西-黎曼方程得

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & -\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=|f'(z)|^2.$$

因此，如果假设在点 $z_0\in D$ 处 $f'(z_0)\neq 0$，由于 $f'(z)$ 的连续性，可以找到 z_0 的邻域 $S(z_0)$，在此邻域内 $f'(z)\neq 0$，即变换(3)的雅可比行列式不为零．这样，根据隐函数存在定理，在 z_0 的邻域中，变换(3)有单值连续反函数

$$\begin{cases} x=x(u,\ v), \\ y=y(u,\ v), \end{cases}$$

再根据反函数的导数定理，函数

$$z=x+iy=x(u,\ v)+iy(u,\ v)$$

就在 $w_0=f(z_0)$ 的邻域中是解析的．因而，可以看出，在 $f'(z)\neq 0$ 的点的某个邻域中，函数 $w=f(z)$ 是单叶解析函数．下面证明，这个事实的逆命题也是成立的．

定理2 设函数 $w=f(z)$ 是区域 D 内的单叶解析函数，则在 D 内 $f'(z)\neq 0$．

【证】 用反证法：假设不然，则必存在点 $z_0\in D$，使 $f'(z_0)=0$．显然，$f'(z)\neq 0$．否则，就有 $f(z)\equiv c$．这就违反

了函数$f(z)$是单叶函数的条件了．因此$f'(z)\neq 0$．根据第四章中的零点的孤立性定理，必存在z_0的邻域$S_\rho(z_0)$：$|z-z_0|<\rho$，使$\overline{S_\rho(z_0)}\in D$且在$0<|z-z_0|<\rho$上$f'(z)\neq 0$．

由于$f(z)$是单叶函数，因此在

$$|z-z_0|=\rho \text{ 上 } f(z)\neq f(z_0).$$

由此，从定理1的证明过程中知道，存在数$\delta>0$，使得

$$|f(z)-f(z_0)|\geqslant\delta>0, \quad |z-z_0|=\rho.$$

以下的讨论同定理1的证明中一样，应用鲁歇定理，对于任意的w^*，$0<|w^*-w_0|<\delta$，函数$f(z)-w^*$在$|z-z_0|<\rho$上的零点的个数与函数$f(z)-f(z_0)$在$|z-z_0|<\rho$上的零点的个数相同．由于$f'(z_0)=0$，因此$f(z)-f(z_0)$在$|z-z_0|<\rho$内至少有两个零点（重点计算在内），因而$f(z)-w^*$在$|z-z_0|<\rho$内也至少有两个零点．因为$f'(z)\neq 0$，因此$f(z)-w^*$就不可能有重零点，即它至少有两个不同的零点．设$f(z_1)-w^*=0$，$f(z_2)-w^*=0$ $(z_1\neq z_2)$．这就违反了函数$f(z)$的单叶性假定．这个矛盾就证明了本定理．】

定理3 设函数$w=f(z)$在D内单叶解析，其值域记为G，则其反函数$z=\varphi(w)$是G内的单叶解析函数．

【证】 首先由定理1知道，G是区域．此外，由于$w=f(z)$是单叶函数，它就实现了双方单值变换，因此，反函数$z=\varphi(w)$也实现双方单值变换．为了要证明反函数的解析性，根据第二章中的反函数导数定理，这只要证明反函数$z=\varphi(w)$是区域G内的连续函数就够了．

事实上，设w_0是区域G内的任意点，$z_0=\varphi(w_0)\in D$．因为D是区域，所以在D内存在z_0的邻域$S_\rho(z_0)$：$|z-z_0|<\rho$．任给$\varepsilon>0$，$\varepsilon<\rho$，显然$|z-z_0|\leqslant\varepsilon\in D$．由函数$f(z)$的单叶性知道，在$|z-z_0|=\varepsilon$上，$f(z)-f(z_0)\neq 0$．因此像在定

理 1 的证明过程中一样可知道，存在数 $\delta>0$，使得

$$|f(z)-f(z_0)|\geqslant\delta,\quad |z-z_0|=\varepsilon.$$

以下的论证完全像在定理 1 的证明中一样，应用鲁歇定理，对于任意的 w^*，$|w^*-w_0|<\delta$，函数 $f(z)-w^*$ 与 $f(z)-w_0$ 在 $|z-z_0|<\varepsilon$ 内的根的个数相同，因而 $f(z)-w^*$ 在 $|z-z_0|<\varepsilon$ 内有零点．由此看出：存在点 z^*，$|z^*-z_0|<\varepsilon$，使

$$f(z^*)-w^*=0,$$

即

$$z^*=\varphi(w^*).$$

这表示：任给 $\varepsilon>0$ ($\varepsilon<\rho$)，存在数 $\delta>0$，使得当 $|w^*-w_0|<\delta$ 时，就有 $|\varphi(w^*)-\varphi(w_0)|=|z^*-z_0|<\varepsilon$．这就证明了函数 $z=\varphi(w)$ 在 w_0 处的连续性．】

1.2 保形变换

若函数 $w=f(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析，且 $f'(z_0)\neq0$，则 $f'(z_0)$ 的模与幅角有重要的几何意义．

设 C 是一条从 z_0 出发的连续曲线，其参数方程为

$$z=z(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1,\quad z(t_0)=z_0$$

(见图 7-2)．设 $z'(t_0)\neq0$，则曲线 C 在 $z=z_0$ 处必有切线，且此切线与正实轴间的倾角为 $\operatorname{Arg} z'(t_0)$．事实上，首先考虑割线 z_0z 关于正实轴的倾角，即向量 $\dfrac{z-z_0}{t-t_0}$ 的倾角 $\operatorname{Arg}\dfrac{z-z_0}{t-t_0}$，

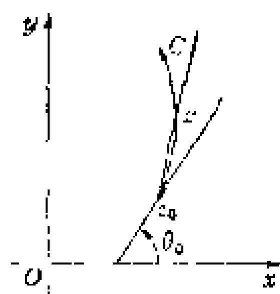


图 7-2

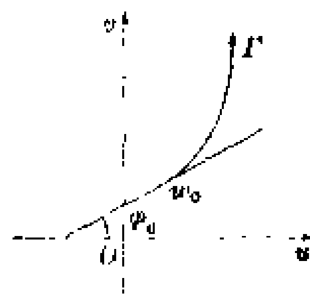


图 7-3

当 $t\to t_0$ 的过程中，$z\neq z_0$. 在相反的情况下，存在数列 $t_n\to t_0$, $t_n\neq t_0$, 但 $z_n=z(t_n)=z_0$. 这样一来，就有

$$z'(t_0)=\lim_{t_n\to t_0}\frac{z(t_n)-z(t_0)}{t_n-t_0}=\lim_{t_n\to t_0}\frac{z_n-z_0}{t_n-t_0}=0.$$

这就与 $z'(t_0)\neq 0$ 的假设相矛盾. 因此就有

$$\lim_{t\to t_0}\frac{z-z_0}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}=z'(t_0)\neq 0,$$

根据第一章中的习题，就得到

$$\lim_{t\to t_0}\operatorname{Arg}\frac{z-z_0}{t-t_0}=\operatorname{Arg}z'(t_0).$$

这就表示曲线 C 在 $z=z_0$ 处的切线关于正实轴的倾角为 $\operatorname{Arg}z'(t_0)$.

现在假设函数 $w=f(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析，$w_0=f(z_0)$, $f'(z_0)\neq 0$.

下面说明 $\operatorname{Arg}f'(z_0)$ 的几何意义：考虑上述从 z_0 出发的连续曲线 C, C 在变换 $w=f(z)$ 下变成 w 平面上从 w_0 出发的连续曲线 Γ: $w=f[z(t)]$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ (参看图 7-3). 根据复合函数求导数的法则，有

$$\left.\frac{df[z(t)]}{dt}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=z_0}\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}$$
$$=f'(z_0)z'(t_0)\neq 0.$$

由此得到

$$\operatorname{Arg}\left.\frac{df[z(t)]}{dt}\right|_{t=t_0}=\operatorname{Arg}f'(z_0)+\operatorname{Arg}z'(t_0).$$

已知 $\operatorname{Arg}z'(t_0)$ 表示曲线 C 在 z_0 处的切线与正实轴间的倾角 θ_0, 同样地，$\operatorname{Arg}\left.\frac{df[z(t)]}{dt}\right|_{t=t_0}$ 表示曲线 Γ 在 w_0 处的切线与正实轴间的倾角 φ_0, 这样，从上面的等式就可以得到

$$\operatorname{Arg}f'(z_0)=\varphi_0-\theta_0. \tag{4}$$

由等式(4)知道，曲线 C 在 $z=z_0$ 处的切线在经过变换 $w=f(z)$ 后，正好旋转角度 $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ 后就可以得到变换后曲线 Γ 在 $w_0=f(z_0)$ 处的切线．这个事实对任何的曲线 C 都成立，因此就称为旋转角的不变性．由此还可以推出一个重要性质：考虑从 z_0 出发的两条连续曲线 C_1 与 C_2，它们在 z_0 处的切线与正实轴间的倾角分别为 θ_1 与 θ_2（参看图 7-4a）．在变换 $w=f(z)$ 下，曲线 C_1 与 C_2 分别变到 w 平面上从 $w_0=f(z_0)$ 出发的两条连续曲线 Γ_1 与 Γ_2，它们与正实轴间的倾角分别记作为 φ_1 与 φ_2（参看图 7-4b）．由公式(4)得到

$$\operatorname{Arg} f'(z_0)=\varphi_1-\theta_1, \quad \operatorname{Arg} f'(z_0)=\varphi_2-\theta_2.$$

因而有

$$\varphi_1-\theta_1=\varphi_2-\theta_2 \quad 即 \quad \varphi_2-\varphi_1=\theta_2-\theta_1. \tag{5}$$

这里 $\theta_2-\theta_1$ 表示曲线 C_1 与 C_2 在 z_0 处切线之间的夹角，亦称曲线 C_1 与 C_2 在 z_0 处的夹角．同理，$\varphi_2-\varphi_1$ 表示曲线 Γ_1 与 Γ_2 在 $w_0=f(z_0)$ 处的夹角．公式(5)表示：**在变换前后，两条曲线之间的夹角保持不变，且方向也保持不变**，即曲线 C_1 到曲线 C_2 的旋转方向与曲线 Γ_1 到曲线 Γ_2 的旋转方向是一致的．这个性质就称为保角性．

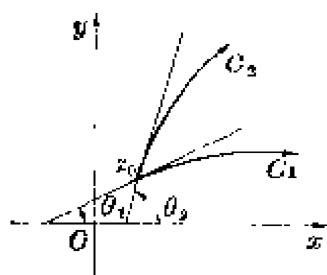


图 7-4a

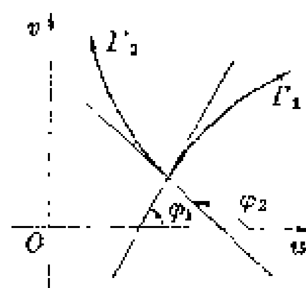


图 7-4b

下面说明 $|f'(z_0)|$ 的几何意义：根据定义，容易得到

$$|f'(z_0)|=\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|\neq 0,$$

这表示模$|f'(z_0)|$等于曲线Γ上从$w_0=f(z_0)$出发的无穷小的弦长与曲线C上从z_0出发对应的无穷小弦长之比的极限，它不依赖于曲线C及Γ. 我们称$|f'(z_0)|$为变换$f(z)$在$z=z_0$处的伸缩率. 因此，伸缩率与曲线C及对应的Γ的选择无关. 我们把这个性质叫做伸缩率的不变性. 从几何意义上看：如果忽略高级无穷小的话，这表示函数$f(z)$将$z=z_0$处的无穷小的圆变到$w=w_0$处的无穷小的圆，其半径之比为$|f'(z_0)|$.

综合上面所述，我们有下面的定理：

定理 4 设函数$w=f(z)$在$z=z_0$处解析且$f'(z_0)\neq 0$，则它有两个性质：

1）旋转角的不变性，且保持方向不变. 这个性质称保角性；

2）伸缩率的不变性.

定义 2 若函数$w=f(z)$在$z=z_0$的邻域上有定义且有上述两个性质，则称函数$w=f(z)$在$z=z_0$处实现保形变换；若函数$w=f(z)$在区域D内每一点上都实行保形变换，则称函数$f(z)$在区域D内实现保形变换.

定理 4 的几何意义可以叙述如下：在z平面上作一个以z_0为一个顶点的无穷小三角形$\triangle_1$，在变换$w=f(z)$下，$w_0=f(z_0)$，$f'(z_0)\neq 0$，得到了一个以w_0为一个顶点的无穷小三角形$\triangle_2$. 在忽略高阶无穷小的情况下，这两个三角形的边长之比为$|f'(z_0)|$，它们的对应角相等，即这两个三角形相似（见图 7-5）.

【例 1】 函数$w=f(z)=z^n$（$n\geqslant 2$自然数）除了$z=0$以外实现保形变换.

解：由于$f'(z)=nz^{n-1}$，因此当$z\neq 0$时，$f'(z)\neq 0$. 根据

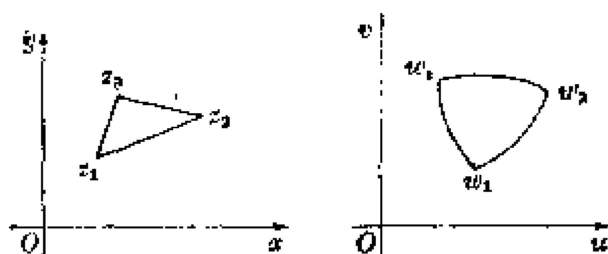


图 7-5

定理4，当 $z\neq0$ 时，$f(z)=z^n$ 就实现保形变换.

反过来，容易看出：若函数 $w=f(z)$ 在 $z=z_0$ 处具有定理4中的两个性质，则其伸缩率 $|f'(z_0)|\neq0$ 且 $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ 存在，它表示旋转角，因此 $w=f(z)$ 在 $z=z_0$ 处有导数 $f'(z_0)\neq0$.

由定理2及定理4可以得到下面的定理：

定理5 若解析函数 $w=f(z)$ 将区域 D 双方单值地变到区域 G，则它必将区域 D 保形变换到区域 G.

定义3 若函数 $w=f(z)$ 在区域 D 上每一点上都能保持伸缩率的不变性且保持夹角的数量不变，但方向却相反，则称它在区域 D 上实现第二类保形变换. 因而称以前引进的保形变换为第一类保形变换.

【例2】 函数 $f(z)=\bar{z}$ 在全平面上实现第二类保形变换.

解：对于任意的 z_0，显然有

$$\lim_{z\to z_0}\left|\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}\right|=1.$$

因此它保持伸缩率不变. 此外，这个变换将 z 平面上的任何曲线变到一条关于实轴对称的曲线，因此立刻看出：它能保持两条曲线之间的夹角的数量不变，但旋转方向正好相反. 这就实现了第二类保形变换.

更一般地说来，有下面的定理：

定理6 设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，$f'(z)\neq 0$，则 $\overline{f(z)}$ 实现第二类保形变换；反之，若函数 $f(z)$ 在 D 内实现第二类保形变换，则函数 $\overline{f(z)}$ 是 D 内的解析函数，且

$$(\overline{f(z)})'\neq 0.$$

【证】 设 $f'(z)\neq 0$，则对于任何的 $z_0\in D$，有

$$\lim_{z\to z_0}\left|\frac{\overline{f(z)}-\overline{f(z_0)}}{z-z_0}\right|=\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|$$
$$=|f'(z_0)|\neq 0.$$

因此 $\overline{f(z)}$ 在 $z=z_0$ 处保持伸缩率不变. 现在设在 $z=z_0$ 处有两条曲线 C_1 与 C_2，它们与正实轴间的夹角分别为 θ_1 及 θ_2. 在经过变换 $w=f(z)$ 后，$w_0=f(z_0)$，C_1 与 C_2 变到从 w_0 出发的两条曲线 Γ_1 与 Γ_2，它们与正实轴间的夹角分别为 φ_1 及 φ_2. 在变换 $w=\overline{f(z)}$ 下，曲线 C_1 与 C_2 就分别变到从 $\overline{w_0}$ 处出发的两条曲线 Γ_1' 及 Γ_2'，它们与正实轴间的夹角分别为 $-\varphi_1$ 及 $-\varphi_2$. 由公式(5)得到

$$(-\varphi_2)-(-\varphi_1)=\varphi_1-\varphi_2=\theta_1-\theta_2.$$

这表示 C_1 与 C_2 之间的夹角数量与 Γ_1'、Γ_2' 之间的夹角数量相同，但方向相反. 因此 $w=\overline{f(z)}$ 实现第二类保形变换.

反之，像上面一样，可以证明：若 $f(z)$ 实现第二类保形变换，则 $\overline{f(z)}$ 就实现第一类保形变换，因此，根据上面已经说过的事实，$\overline{f(z)}$ 是 D 内的解析函数，且 $(\overline{f(z)})'\neq 0$. ∎

习 题 7·1

1. 函数 $w=z^2$、$w=z^3$ 分别在怎样的区域上为单叶函数？
2. 设变量 $z=x+iy$ 描出曲线 $x=1$，$-1\leqslant y\leqslant 1$，求这条曲线在变换 $w=z^3$ 下所得到的曲线的参数方程

3. 求变换 $w=(z+1)^2$ 的等伸缩率及等旋转角的轨迹方程.
4. 设 z 平面上的面积元素为 $dx\,dy$, 在解析函数 $w=f(z)$ 所实现的变换下, 求证 w 平面上的面积元素为 $|f'(z)|^2 dx\,dy$. 设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析, 其值域为 G, 能不能说:

$$G\text{ 的面积}=\iint_D |f'(z)|^2 dx\,dy?$$

5. 当 z 在 $1\leqslant|z|\leqslant2,\ -\frac{\pi}{4}\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{4}$ 上变化时, 函数 $w=z^2$ 的值域的面积是多少?
6. 利用解析函数将区域变为区域的定理证明最大模原理.
7. 设函数 $w=f(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析且 $f'(z_0)\neq0$, 证明: 存在 z_0 的邻域, 在此邻域上, 函数 $w=f(z)$ 存在单值反函数 $z=\varphi(w)$, 且 $z=\varphi(w)$ 在 $w_0=f(z_0)$ 处解析.

第二节　分式线性变换

考虑下面形式的函数

$$w=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc\neq0,\tag{1}$$

其中 a, b, c, d 是复常数. 今后不妨假设 $ad-bc\neq0$, 否则, $f(z)\equiv$常数. 这一类函数的形式比较简单, 称为分式线性函数, 它所实现的变换称为分式线性变换. 这一节中就研究这类函数的变换特性. 在研究一般的保形变换时, 也常常借助于它们而得到种种启发. 在研究各种特殊形状的区域的变换时, 它们能起很重要的作用.

2.1 分式线性变换在全平面上实现单叶保形变换

首先定义两条曲线在 $z=\infty$ 处的夹角:

定义 1 设在 z 平面上有两条延伸到 $z=\infty$ 的曲线 C_1 与

C_2. 令 $\zeta=\dfrac{1}{z}$, 则 $z=\infty$ 变为 $\zeta=0$. 于是曲线 C_1 与 C_2 就分别变为由 $\zeta=0$ 出发的两条曲线 C_1' 与 C_2'. C_1' 与 C_2' 在 $\zeta=0$ 处的夹角就称为曲线 C_1 及 C_2 在 $z=\infty$ 处的夹角.

这就是说: 两条曲线在 ∞ 处的夹角是通过变换 $\zeta=\dfrac{1}{z}$ 后,从得到的象在 $\zeta=0$ 处的夹角来定义的.

现在考虑分式线性变换(1). 容易看出,函数

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

实现两个扩充平面之间的双方单值变换,其反变换为

$$z=-\frac{dw-b}{cw-a}.$$

设 $c\neq 0$, 则变换(1)将 $z=-\dfrac{d}{c}$ 变到 $w=\infty$; $z=\infty$ 变到 $w=\dfrac{a}{c}$. 显然

$$\frac{dw}{dz}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0,\quad z\neq -\frac{d}{c}.$$

因此, 变换(1)在 $z\neq-\dfrac{d}{c}$ 处实现了保形变换. 当 $z=-\dfrac{d}{c}$ 时, $w=\infty$, 因而考虑函数 $w_1=\dfrac{1}{w}=\dfrac{cz+d}{az+b}$, 它将 $z=-\dfrac{d}{c}$ 变到 $w_1=0$, 且

$$\left.\frac{dw_1}{dz}\right|_{z=-\frac{d}{c}}=\left.\frac{cb-ad}{(az+b)^2}\right|_{z=-\frac{d}{c}}=\frac{cb-ad}{\left(-\dfrac{ad}{c}+b\right)^2}$$

$$=\frac{c^2}{bc-ad}\neq 0.$$

因而它实现 $z=-\dfrac{d}{c}$ 处的保角性. 当 $z=\infty$ 时, $w=\dfrac{a}{c}$, 因而考虑函数

$$w=\frac{a\dfrac{1}{\zeta}+b}{c\dfrac{1}{\zeta}+d}=\frac{a+b\zeta}{c+d\zeta},$$

它将 $\zeta=0$ 变到 $w=\dfrac{a}{c}$. 显然

$$\left.\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=0}=\left.\frac{bc-ad}{(c+d\zeta)^2}\right|_{\zeta=0}=\frac{bc-ad}{c^2}\neq 0.$$

因而它实现 $\zeta=0$ 处的保形变换，即变换 (1) 在 $z=\infty$ 处也具有保角性. 这样一来，当 $c\neq 0$ 时，变换(1)就实现了两个扩充平面上的保形变换*).

设 $c=0$, 则变换(1)可以改写为

$$w=\frac{az+b}{d}\triangleq \alpha z+\beta,\quad \alpha\neq 0. \tag{2}$$

显然有

$$\frac{dw}{dz}=\alpha\neq 0.$$

因此变换(1)在任何有穷点都实现保形变换. 由于 $z=\infty$ 对应着 $w=\infty$, 因而为了要研究变换(2)在无穷远处的保角性，必需考虑函数

$$w_1=\frac{1}{w}=\frac{1}{\alpha\dfrac{1}{\zeta}+\beta}=\frac{\zeta}{\alpha+\beta\zeta},$$

它将 $\zeta=0$ 变到 $w_1=0$. 显然

$$\left.\frac{dw_1}{d\zeta}\right|_{\zeta=0}=\left.\frac{\alpha}{(\alpha+\beta\zeta)^2}\right|_{\zeta=0}=\frac{1}{\alpha}\neq 0.$$

因而它实现 $\zeta=0$ 处的保形变换，即变换 (1) 在 $z=\infty$ 处也具有保角性. 这样一来，当 $c=0$ 时，变换(1)也实现了两个扩充平面上的保形变换.

总结上面的讨论，得到下面的定理:

---

*) 在无穷远处，不考虑伸缩率的不变性.

定理1 分式线性变换(1)实现了两个扩充平面之间的双方单值保形变换.

2.2 分式线性变换的分解

我们首先研究四种特殊的简单变换，然后再证明任意一个分式线性变换一定可以分解成为这四个简单变换的组合.

1) $w=z+b$

在这种变换下，任何一个点 z 沿着向量 b 的方向平移到点 w, 移动的距离为 $|b|$ (见图 7-6). 设

$$z=x+iy,\ w=u+iv,\ b=b_1+ib_2,$$

则其变换公式为

$$\begin{cases}u=x+b_1,\\ v=y+b_2.\end{cases}$$

这就是众所周知的平移变换公式.

2) $w=e^{i\theta_0}z$ (θ_0 为实数)

在这种变换下，

$$|w|=|z|,\ \operatorname{Arg} w=\operatorname{Arg} z+\theta_0.$$

因此这种变换保持向量 z 的长度不变，但幅角旋转一个角度 θ_0 (见图 7-7). 若 $z=x+iy$, $w=u+iv$, 则有

$$\begin{cases}u=x\cos\theta_0-y\sin\theta_0,\\ v=x\sin\theta_0+y\cos\theta_0.\end{cases}$$

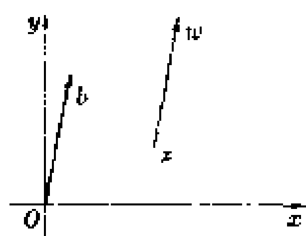


图 7-6

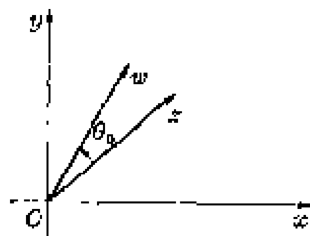


图 7-7

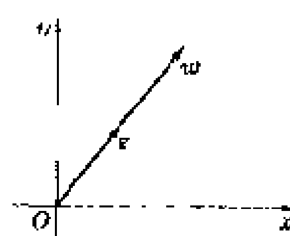


图 7-8

这就是众所周知的绕原点旋转角度为 θ_0 的变换公式.

3) $w=kz \quad (k>0)$

在这种变换下,

$$|w|=k|z|, \quad \operatorname{Arg} w=\operatorname{Arg} k+\operatorname{Arg} z=\operatorname{Arg} z.$$

因此这种变换保持向量 z 的方向不变, 其长度放大 k 倍(见图 7-8). 设 $z=x+iy$, $w=u+iv$, 则有

$$\begin{cases} u=kx, \\ v=ky. \end{cases}$$

这就是众所周知的相似变换.

这样一来, 任何一个整线性变换 $w=\alpha z+\beta\ (\alpha\neq 0)$ 都可以分解为上述三个简单变换的组合. 事实上, 有

$$w=\alpha\left(z+\frac{\beta}{\alpha}\right)=|\alpha| e^{i \operatorname{Arg} \alpha}\left(z+\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

即先作平移变换 $\zeta=z+\dfrac{\beta}{\alpha}$, 次作旋转变换 $\zeta_1=e^{i \operatorname{Arg} \alpha} \zeta$, 最后再作一个相似变换 $w=|\alpha| \zeta_1$ 即得.

4) $w=\dfrac{1}{z}$ (称为反演变换)

设 $z=re^{i\theta}$, $w=\rho e^{i\varphi}$, 则得到变换公式

$$\rho e^{i\varphi}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r} e^{-i\theta},$$

即

$$\rho=\frac{1}{r}, \quad \varphi=-\theta. \tag{3}$$

可以将这个变换分解为两个更简单的变换的组合, 为此引入下面的定义:

定义 2 设 C 是以 z_0 为中心、半径为 R 的圆周. 如果有

$$|z_2-z_0|\,|z_1-z_0|=R^2, \quad \operatorname{Arg}(z_2-z_0)=\operatorname{Arg}(z_1-z_0) \tag{4}$$

成立，则称点 z_2 是由点 z_1 关于圆周 C 作对称变换后得到的(见图 7-9a)；如果 z_1 与 z_2 的联线与直线 l 垂直，且它们到垂足的距离相等(见图 7-9b)，则称点 z_2 是由点 z_1 关于直线 l 作对称变换后得到的．

由此看出：z_2 与 z_1 关于圆周 C 对称的充要条件是

$$z_2-z_0=\frac{R^2}{\overline{(z_1-z_0)}},$$

此时，z_1 与 z_2 的联线经过 z_0，且 z_0 在线段 z_1z_2 之外．

这样一来，变换(3)可以分解为两个对称变换的组合(见图 7-10)：一个关于圆周 $|z|=1$ 对称：

$$z_1=\frac{1}{\bar{z}}, \tag{5}$$

即设 $z=re^{i\theta}$，$z_1=r_1e^{i\theta_1}$，就有

$$r_1=\frac{1}{r},\quad \theta_1=\theta; \tag{6}$$

另一个是关于实轴对称：

$$w=\bar{z}_1=\overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}=\frac{1}{z},$$

即设 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$w=\rho e^{i\varphi}$，得到

$$\rho=r_1,\quad \varphi=-\theta_1. \tag{7}$$

需要注意的是：这两个变换都是由解析函数的共轭函数所形成的变换．根据定理 5，容易看出，它们都实现了第二类

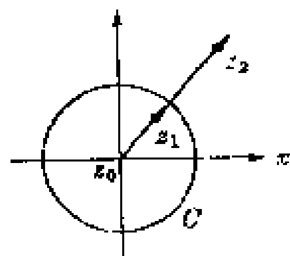


图 7-9a

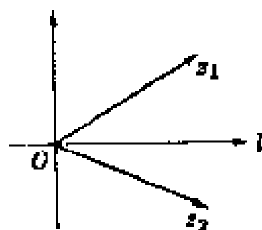


图 7-9b

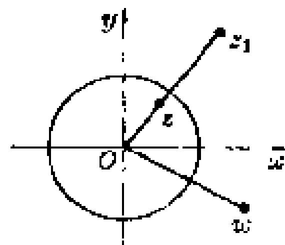


图 7-10

保形变换.

定理2 任意一个形如(1)式的分式线性变换都可以分解为上述四个简单变换的组合.

【证】 若$c=0$, 前面已经讨论过, 变换(1)可以分解为前面三个简单变换的组合.

若$c\neq0$, 则可以把变换(1)写成

$$w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cz+d}. \tag{8}$$

若令

$$w_1=cz+d,\quad w_2=\frac{1}{w_1},\quad w_3=Aw_2,\quad w=w_3+B,$$

其中$A=\dfrac{bc-ad}{c}$, $B=\dfrac{a}{c}$. 则变换(8)可以分解成为上述四个变换的组合, 而其中每一个变换又可以分解为四个简单变换的组合, 因此变换(8)可以分解为上述四个简单变换的组合. 】

今后, 我们在讨论一般分式线性变换的性质时, 也可以考虑这四种简单变换是否都具有这种性质, 如果每一个变换都具有某一个性质, 则复合起来的变换(1)也必具有这个性质.

2.3 三对对应点唯一地决定分式线性变换

从形式上看, 一个分式线性变换(1)具有四个复参数a、b、c、d. 但是实际上, 由于这四个参数至少有一个不为零, 因此就可以用这个不为零的参数来除变换(1)的分子及分母, 这样一来, 变换(1)在实质上只依赖于三个复参数了(六个实参数). 为了要确定这三个复参数, 只需在z平面上任意地指定三个点z_1、z_2、z_3, 对应地变到w平面上得三个点w_1、w_2、w_3即可:

$$w_j=\frac{az_j+b}{cz_j+d}\quad (j=1, 2, 3). \tag{9}$$

为了从公式(9)解出 a、b、c、d, 我们从公式(9)及变换(1)得到

$$\begin{aligned}
w-w_1&=\frac{(ad-bc)}{(cz+d)}\cdot\frac{(z-z_1)}{(cz_1+d)},\\
w-w_3&=\frac{(ad-bc)}{(cz+d)}\cdot\frac{(z-z_3)}{(cz_3+d)},\\
w_2-w_1&=\frac{(ad-bc)}{(cz_2+d)}\cdot\frac{(z_2-z_1)}{(cz_1+d)},\\
w_2-w_3&=\frac{(ad-bc)}{(cz_2+d)}\cdot\frac{(z_2-z_3)}{(cz_3+d)}.
\end{aligned} \tag{10}$$

分别将等式(10)的前两式相除,后两式相除,得到

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}=\frac{(z-z_1)}{(z-z_3)}\cdot\frac{(cz_3+d)}{(cz_1+d)},$$

$$\frac{w_2-w_1}{w_2-w_3}=\frac{(z_2-z_1)}{(z_2-z_3)}\cdot\frac{(cz_3+d)}{(cz_1+d)}.$$

从而得到

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}:\frac{w_2-w_1}{w_2-w_3}=\frac{z-z_1}{z-z_3}:\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}. \tag{11}$$

这样一来, 从(11)经过适当变化后就可以得到变换(1), 其中 a、b、c、d 就可以由 z_i 及 $w_i(i=1, 2, 3)$ 来确定, 且除了相差一个常数因子外是唯一的. 因为公式(11)比较方便, 故经常要用到它. 这样,就得到下面的定理:

定理3 如果规定 z 平面上的三个点 $z_i(i=1, 2, 3)$ 对应地变到 w 平面上的三个点为 $w_i(i=1, 2, 3)$, 这样的分式线性变换(1)必是唯一的,且具有形式(11).

注 若 z_i 或 $w_i(i=1, 2, 3)$ 有一点为 ∞, 则在公式(11)中将包有 ∞ 的分子及分母都取为1即可. 如 $w_2=\infty$, 则公式(11)就化为

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}=\frac{z-z_1}{z-z_3}:\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}.$$

事实上，在此情况下，当 $z=z_2$ 时，上面等式右边就为1，由此等式就推出 $w=\infty$；当 $z=z_1$ 时，上面等式右边就为0，由此等式就推出 $w=w_1$；当 $z=z_3$ 时，上面等式右边为 ∞，由此等式就推出 $w=w_3$.

【例 1】 求将 -1、i、1 变到 -1、0、1 的分式线性变换.

解：由公式(11)得到

$$\frac{w-1}{w-1}:\frac{0+1}{0-1}=\frac{z+1}{z-1}:\frac{i+1}{i-1},$$

即
$$\frac{w+1}{w-1}=-i\frac{z+1}{z-1},$$

因而
$$w=\frac{1+iz}{i+z}.$$

2.4 分式线性变换的保圆性

今后，我们把直线看作半径为 ∞ 的圆周，则分式线性变换具有将圆周变成圆周的性质.

定理 4 分式线性变换(1)将 z 平面上的圆周双方单值保形变换为 w 平面上的圆周.

【证】 由定理1知道，分式线性变换实现两个扩充平面之间的双方单值保形变换. 根据定理2，任何一个分式线性变换(1)可以分解为四个简单变换的组合，因此只要证明这四个简单变换都具有把圆周变成圆周的性质即可.

对于平移变换 $w=z+b$ 及旋转变换 $w=e^{i\theta_0}z$ 从几何上容易看出，它们都有保持圆周不变的性质. 这也可以用分析方法来直接证明，留给读者自己证明.

对于相似变换 $w=kz(k>0)$ 及反演变换 $w=\frac{1}{z}$ 也不难证明它们都具有保持圆周不变的性质. 设圆周的方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R \quad (x_0、y_0、R\text{ 是实数}, R>0) \qquad (12)$$

或

$$ax+by+c=0\ (a、b、c\text{ 是实数}, a、b\text{ 不全为 }0). \qquad (13)$$

从方程(12)可以得到

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-R^2=0. \qquad (12')$$

设
$$z=x+iy,\quad z_0=x_0+iy_0,$$
则
$$x^2+y^2=z\bar{z},\quad x=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i},$$

代入(12′)式后,得到

$$z\bar{z}+\bar{B}z+B\bar{z}+D=0, \qquad (14)$$

其中 $B=-(x_0+iy_0)=-z_0$, $D=x_0^2+y_0^2-R^2$. 反过来,也容易看出, 若方程(14)中的 D 是实数, 且 $|B|^2-D>0$, 则(14)是一个以 $-B$ 为中心、半径为 $R=\sqrt{|B|^2-D}$ 的圆周方程: $|z+B|=\sqrt{|B|^2-D}$. 此外, 从方程可以得到

$$\bar{E}z+E\bar{z}+C=0, \qquad (15)$$

其中 $E=\frac{1}{2}(a+ib)\neq 0$. 反过来也容易看出, 若方程(15)中的 $E\neq 0$, 则它必是直线方程,在这里也称它为圆周方程.

考虑相似变换 $w=kz(k>0)$. 此时满足条件 $|B|^2-D>0$ 的圆周方程(14)变为

$$\frac{1}{k^2}w\bar{w}+\frac{\bar{B}}{k}w+\frac{B}{k}\bar{w}+D=0,$$

即
$$w\bar{w}+\overline{kB}w+kB\bar{w}+Dk^2=0.$$

这里 Dk^2 为实数,且 $|kB|^2-Dk^2=k^2(|B|^2-D)>0$, 根据上面的讨论知道,此方程仍然是一个圆周方程. 同理,此时满足

$E\neq 0$ 的圆周方程(15)变为

$$\frac{\overline{E}}{k}w+\frac{E}{k}\overline{w}+C=0,$$

即

$$\overline{E}w+E\overline{w}+Ck=0.$$

它也仍然是一个圆周方程. 因此, 相似变换保持圆周不变.

考虑反演变换 $w=\frac{1}{z}$. 此时满足条件 $|B|^2-D>0$ 的圆周方程(14)变为

$$\frac{1}{w\overline{w}}+\frac{\overline{B}}{w}+\frac{B}{\overline{w}}+D=0,$$

即

$$1+\overline{B}\overline{w}+Bw+Dw\overline{w}=0. \tag{16}$$

若圆周(14)经过 $z=0$, 则由此推出 $D=0$. 此时 $B\neq 0$, 否则, 圆周(14)就退化为一个点了. 这样一来, 方程(16)就表示一条直线, 即是圆周方程. 若圆周(14)不经过 $z=0$, 则 $D\neq 0$. 此时从方程(16)可以得到

$$w\overline{w}+\overline{\left(\frac{\overline{B}}{D}\right)}w+\frac{\overline{B}}{D}\overline{w}+\frac{1}{D}=0.$$

这里 $\frac{1}{D}$ 是实数, 且 $\left|\frac{\overline{B}}{D}\right|^2-\frac{1}{D}=\frac{1}{D^2}(|B|^2-D)>0$, 因此方程(16)仍然是一个圆周方程. 同理, 此时满足 $E\neq 0$ 的圆周方程(15)就变为

$$\overline{E}\frac{1}{w}+E\frac{1}{\overline{w}}+C=0,$$

即

$$\overline{E}\overline{w}+Ew+Cw\overline{w}=0. \tag{17}$$

若方程(15)经过 $z=0$, 则 $C=0$. 此时方程(17)是一个直线方程, 即圆周方程. 若方程(15)不经过 $z=0$, 则 $C\neq 0$. 因此方程(17)可以写为

$$w\overline{w}+\overline{\left(\frac{\overline{E}}{C}\right)}w+\frac{\overline{E}}{C}\overline{w}=0,$$

这里 $$\left|\frac{\bar{E}}{C}\right|^2-0=\frac{|E|^2}{C^2}>0,$$

因此它仍然是一个圆周方程. 因此, 反演变换也保持圆周不变. ▌

现在证明上面定理的逆定理:

定理5 任给两个圆周 C 及 Γ, 必存在形为(1)的分式线性变换,它把 C 双方单值保形变换到 Γ.

【证】 在圆周 C 上任取三个点 z_1、z_2、z_3; 在圆周 Γ 上也任取三个点 w_1、w_2、w_3. 构造将 z_i 对应地变到 $w_i(i=1, 2, 3)$的分式线性变换(11). 根据定理4, 分式线性变换(11)必将经过三个点 $z_i(i=1, 2, 3)$的圆周变到经过三个点 $w_i(i=1, 2, 3)$的圆周. 因为三个点唯一地决定一个经过它们的圆周,因此分式线性变换(11)必将圆周 C 变到圆周 Γ. ▌

注 从定理的证明可以看出: 我们可以在圆周 C 上任取三个点变到圆周 Γ 上指定的三个点, 此时变换(11)就具有将圆周 C 变到圆周 Γ 的性质. 已知圆周 C 上的任意三个点只依赖于三个实参数,因此定理5中将圆周 C 变到圆周 Γ 的分式线性变换可以有三个任意的实参数.

定理5的变换将圆周 C 变到圆周 Γ, 那么这个变换能否将圆周 C 所围的区域变到圆周 Γ 所围的区域呢? 下面的定理回答了这个问题.

定理6 若在圆周 C 上按逆时针方向取三个点 z_1、z_2、z_3, 在圆周 Γ 上也按逆时针方向取三个点 w_1、w_2、w_3, 则分式线性变换(11)必将圆周 C 所围的区域双方单值保形变换到由圆周 Γ 所围的区域, 即沿 C 按逆时针方向绕行时的左侧区域变到沿 Γ 按逆时针方向绕行时的左侧区域.

【证】 根据定理5, 变换(11)将 C 变到 Γ. 此外, 由于分

式线性变换的双方单值性质(见定理1)，因此Γ也必只是由C变来的，即在C与Γ之间实现了双方单值的变换. 下面分三步来证明本定理:

1) 首先证明：在C的左侧区域内不可能存在两个点A_1与A_2使得$f(A_1)=B_1$在Γ的左侧区域中；$f(A_2)=B_2$在Γ的右侧区域中.

事实上，在相反的情况下，若存在点A_1与A_2具有上述性质,则在C的左侧区域中作连接A_1与A_2的折线l. 在变换(11)下，折线l变到连接点B_1与B_2的曲线L. 因为B_1在Γ的左侧区域内,而B_2在Γ的右侧区域内，因此曲线L必与Γ至少相交于一点. 根据C与Γ的变换特性，此交点必是由C上的一点变来的；另一方面，此交点又必是由l上的某一点变来的，而l与C并不相交. 这与变换(11)的双方单值性相矛盾. 这就证明了结论1).

因为分式线性变换实现扩充平面上的双方单值变换，故由结论1)知道，C的左侧区域或者全部变到Γ的左侧区域中或者全部变到Γ的右侧区域中.

2) 证明C的左侧区域中必存在一点变到Γ的左侧区域中.

过z_1作C的内法线向量，即法线方向指向C的左侧区域(见图7-11)，它是弧$\widehat{z_1z_2z_3}$在z_1处的切线经过旋转$\frac{\pi}{2}$后得到的向量$\bar{n}$. 向量$\bar{n}$在分式线性变换(11)下变到曲线L'，其切线向量记作$\bar{n}'$. 根据分式线性变换的保角性，它是由Γ上的弧$\widehat{w_1w_2w_3}$在w_1处的切线经过旋转$\frac{\pi}{2}$后得到的向量(见图8-11)，即它也指向Γ的左侧区域. 由此推出$\bar{n}$及L'的端点就分别在C及Γ的左侧区域中.

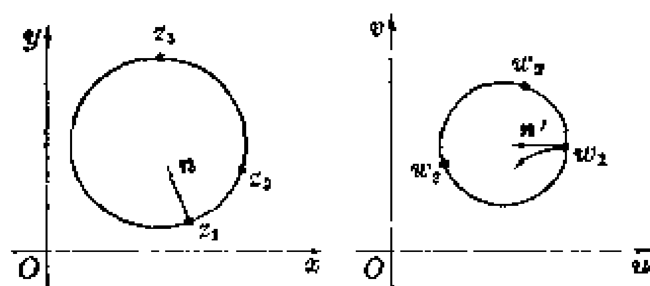


图 7-11

这样一来，由结论 1)及 2)知道，C 的左侧区域必全部变换到 Γ 的左侧区域内部.

3) 证明 C 的左侧区域在变换(11)下正好充满 Γ 的左侧区域，即 Γ 左侧区域中任何点必是由 C 的左侧区域中的点变来的.

事实上，在相反的情况下，在 Γ 的左侧区域中必存在着一个点 w^*，它不是由 C 的左侧区域变来的. 但由于分式线性变换实现扩充平面之间的双方单值变换，且 C 上的点只可能变到 Γ 上的点，因此点 w^* 只可能是由 C 的右侧区域中的点变来的. 这样一来，在 Γ 的左侧区域中必存在两个点，其中一个点是由 C 的左侧区域中的点变来的；另一个点是由 C 的右侧区域中的点变来的. 但这像结论 1)一样，是不可能的. 归纳1)、2)、3)即证明了本定理. ∎

注 1 由于分式线性变换实现扩充平面上的双方单值变换，因此由定理 6 可以推出：变换(11)也必将 C 的右侧区域双方单值地变到 Γ 的右侧区域.

注 2 如果在 C 上选择的 z_1、z_2、z_3 的方向与 Γ 上选择的 w_1、w_2、w_3 的方向正好相反，则将 z_i 变到 $w_i(i=1, 2, 3)$ 的分式线性变换(11)必将 C 的左侧区域双方单值地变到 Γ 的右侧区域，将 C 的右侧区域双方单值地变到 Γ 的左侧区

域．这附注的证明留给读者完成．

【例 2】 求将$|z|<1$变到$|w-1|<1$的分式线性变换．

解：在$|z|=1$上按逆时针方向任取三个点，如-1、$-i$、1，在$|w-1|=1$上也按逆时针方向任取三个点，如0、$1-i$、2．根据定理 6，由公式(11)所确定的变换就能满足要求，即

$$\frac{w-0}{w-2}:\frac{1-i-0}{1-i-2}=\frac{z+1}{z-1}:\frac{-i+1}{-i-1}.$$

由此得到
$$w=z+1.$$

2.5 分式线性变换保持对称点的不变性

分式线性变换还有一个重要的性质，这就是保持对称点的不变性．

定理 7 若分式线性变换 (1) 将圆周C变到圆周Γ，且关于圆周C对称的两个点z_1与z_2变到点w_1与w_2，则w_1与w_2必关于圆周Γ对称．

为了证明这个定理，首先证明一个有关对称点的几何性质的引理：

引理 1 点z_1与z_2关于圆周C是对称的充要条件是经过z_1与z_2的所有圆周都必与圆周C正交．

【证】 首先考虑圆周C是直线l的情况：

必要性：设点z_1与z_2关于直线l对称（见图 7-12)，即l是线段z_1z_2的垂直平分线．由此看出，线段z_1z_2垂直于直线l，且经过点z_1与z_2的圆周的圆心必在直线l上，因而此圆周必与直线l正交．

充分性：设经过z_1与z_2的任意圆周K都与直线l正交．此时，z_1与z_2必在直线l的两侧，否则，以线段z_1z_2为直径作圆就不与直线l相交了．因为经过z_1与z_2的圆周K与

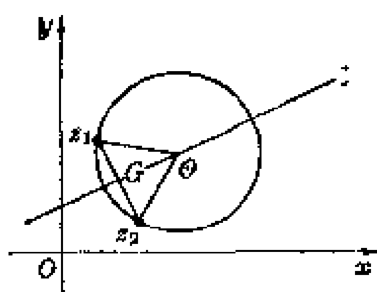


图 7-12

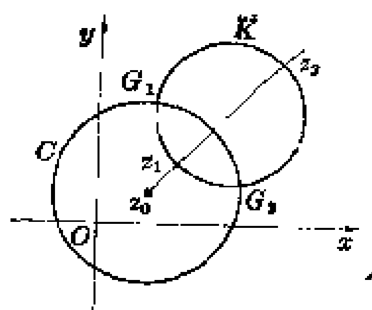


图 7-13

直线 l 正交，因此 K 的圆心 $\odot$ 必在直线 l 上。此外，根据题设条件知：连接 z_1 与 z_2 的直线也与 l 正交，把其交点记为 G。考虑三角形 $\triangle G\odot z_1$ 与 $\triangle G\odot z_2$。显然

$$\angle z_1G\odot=\angle z_2G\odot=\frac{\pi}{2},\ |\odot z_1|=|\odot z_2|=\text{圆周 } K \text{ 的半径},$$

$\odot G$ 是公共边，因此 $\triangle G\odot z_1\cong\triangle G\odot z_2$。由此推出 $|z_1G|=|Gz_2|$，即 z_1 与 z_2 关于直线 l 是对称的。

现在考虑圆周 C 是圆周 $|z-z_0|=R$ 的情况：

必要性：从定理的题设条件及定义 2 中的公式(4)知道，z_1 与 z_2 都在 z_0 出发的射线上(见图 7-13)，且一个在 C 内部，另一个在 C 外部。由于 z_1 与 z_2 的连线经过圆心 z_0，因此它必垂直于圆周 C。对于经过 z_1 与 z_2 的任意一个圆周 K，设 K 与 C 的交点为 G_1 与 G_2。由公式(4)知道

$$|z_0G_1|^2=|z_0z_1|\,|z_0z_2|,$$

即

$$\frac{|z_0G_1|}{|z_0z_1|}=\frac{|z_0z_2|}{|z_0G_1|}. \tag{18}$$

现在考虑三角形 $\triangle G_1z_0z_2$ 及 $\triangle G_1z_0z_1$，它们有一个公共角 $\angle G_1z_0z_2=\angle G_1z_0z_1$，且由于等式(18)，其对应边成比例，因此 $\triangle G_1z_0z_1\approx\triangle G_1z_0z_2$。由此推出 $\angle z_1z_2G_1=\angle z_1G_1z_0$。因为 $\angle z_1z_2G_1$ 与弦 G_1z_1 都对应着圆周 K 上的同一段弧 $\widehat{G_1z_1}$，因此 $\angle z_1G_1z_0$ 必是圆 K 在 G_1 上的切线角。这表示 z_0G_1 是

圆 K 在 G_1 处的切线，而 z_0G_1 又是圆周 C 的半径，因此圆周 C 与圆周 K 正交.

充分性：根据题设条件，经过 z_1 与 z_2 的任意一个圆周 K 都与圆周 C 正交，因此这两个点 z_1 与 z_2 必然是一个在圆周 C 的内部；而另一个在圆周 C 的外部，否则，以线段 z_1z_2 为直径的圆周 K 就不与圆周 C 正交了. 由于经过 z_1 及 z_2 的直线与圆周 C 正交，因此圆周 C 的圆心 z_0 必在此直线上. 显然点 z_1 与 z_2 必在以 z_0 出发的射线上，否则，若 z_0 在线段 z_1z_2 之间，则圆周 K 就不与 C 正交了. 现在设经过 z_1 与 z_2 的圆周 K 与 C 交于点 G_1 与 G_2. 因为 K 与 C 正交，所以 z_0G_1 就与 K 相切于 G_1. 考虑三角形 $\triangle G_1z_0z_2$ 及 $\triangle G_1z_0z_1$. 由于 z_0G_1 与 K 相切，因此 $\angle z_1G_1z_0$ 是切线角，即 $\angle z_1G_1z_0=\angle z_1z_2G_1$. 因为 $\angle G_1z_0z_1$ 是两个三角形的公共角，因此

$$\triangle G_1z_0z_2\approx\triangle G_1z_0z_1.$$

从而对应边成比例，即等式(18)成立，由此就得到了公式(4). 这样一来，根据定义 2，z_1 与 z_2 就关于圆周 C 对称了.】

现在来证明定理 7. 因为按定理的题设条件，z_1 与 z_2 关于圆周 C 对称，因此根据引理 1，经过 z_1 与 z_2 的圆周族 $\{K\}$ 都与 C 正交. 由于分式线性变换的保角性，圆周族 $\{K\}$ 经过变换后得到的圆周族 $\{K'\}$ 也必与 Γ 正交，其中 Γ 是由 C 变换来的，且经过点 w_1 与 w_2. 此外，根据分式线性变换的双方单值的保持圆周不变及保角的性质，经过 w_1 与 w_2 的任意一个圆周 S' 也必是由经过 z_1 与 z_2 的任意一个圆周 S 变来的. 根据条件 $S\in\{K\}$，所以 $S'\in\{K'\}$，即 S' 也必与圆周 Γ 正交. 由此根据引理 1 的充分性知道：点 w_1 与 w_2 关于圆周 Γ 对称. 定理 7 证毕. 】

2.6 几个典型的分式线性变换

1. 将上半平面变到上半平面的分式线性变换

设分式线性变换 $w=f(z)$ 将上半平面变到上半平面，则它必将实轴变到实轴. 根据定理 6 的注 2, $w=f(z)$必将实轴上三个点 $x_1<x_2<x_3$ 变为实轴上的三个点 $u_1<u_2<u_3$, 即保持正实轴的方向不变. 由此推出 $w=f(z)$在 $z=x_1$ 处的旋转角为零,即

$$\operatorname{Arg} f'(x_1)=0 \quad \text{或} \quad f'(x_1)>0.$$

由于三对对应点 x_1、x_2、x_3 与 u_1、u_2、u_3 唯一地决定一个分式线性变换,因此

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

中的系数 a、b、c、d 完全可以由解方程

$$u_i=\frac{ax_i+b}{cx_i+d} \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

决定(当然精确到一个常数因子). 所以可以认为系数 a、b、c、d 都是实数. 此外,由于

$$f'(x_1)=\frac{ad-bc}{(cx_1+d)^2}>0,$$

因而有 $ad-bc>0$.

反过来,任意一个分式线性变换

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \quad (a、b、c、d\ \text{是实数,且}\ ad-bc>0)$$

也必然将上半平面变到上半平面. 事实上,由于 a、b、c、d 都是实数,因此它必然将实轴变为实轴. 由于 $ad-bc>0$, 所以

$$f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}>0,$$

即
$$\operatorname{Arg} f'(x)=0.$$

这表示在实轴上经过变换后的旋转角为零，即将正实轴方向变到正实轴方向. 由此应用定理 6，这个变换必将上半平面变到上半平面.

总结上面的讨论，得到下面的定理：

定理 8 分式线性变换 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 将上半平面变到上半平面的充要条件是：a、b、c、d 都是实数（精确到常数因子），且

$$ad-bc>0. \tag{19}$$

注 1 满足条件(19) 的分式线性变换也必将下半平面变到下半平面.

注 2 用类似的方法可以证明：分式线性变换

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

将上半平面变到下半平面（或将下半平面变到上半平面）的充要条件是：a、b、c、d 都是实数（精确到常数因子），且

$$ad-bc<0. \tag{20}$$

【例 3】 求将上半平面变到上半平面且将 $z=0$ 变到 $w=0$，$z=i$ 变到 $w=1+i$ 的分式线性变换.

解：根据定理 8，可以从分式线性变换

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \quad (a、b、c、d \text{ 都是实数}，ad-bc>0)$$

中寻找. 由于 $z=0$ 变到 $w=0$，因此得到 $b=0$. 将分式线性变换(1) 的分子及分母都除以 a 后，得到

$$w=\frac{z}{ez+f}，\quad 其中\ e=\frac{c}{a}，\quad f=\frac{d}{a}\ 都是实数.$$

再从 $z=i$ 变到 $w=1+i$ 得到

$$1+i=\frac{i}{ei+f},$$

即 $$(f-e)+i(f+e)=i.$$
由此等式比较实部与虚部后，得到两个方程
$$f-e=0,\quad f+e=1.$$
这就解出了$f=e=\frac{1}{2}$. 因此所求的变换就是
$$w=\frac{2z}{z+1}.$$

2. 将上半平面变到单位圆内部的分式线性变换

设分式线性变换 $w=f(z)$将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 变到 $|w|<1$，则它必将某一点 α, $\operatorname{Im}\alpha>0$, 变到 $w=0$. 同时，根据分式线性变换保持对称点不变的性质，它必将 $z=\alpha$ 关于实轴的对称点 $z=\bar{\alpha}$ 变到 $w=0$ 关于 $|w|=1$ 的对称点 $w=\infty$. 因此，若设
$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\tag{1}$$
则由 $0=f(\alpha)$得到 $a\alpha+b=0$, 即
$$\alpha=-\frac{b}{a};$$
由 $\infty=f(\bar{\alpha})$得到 $c\bar{\alpha}+d=0$, 即
$$\bar{\alpha}=-\frac{d}{c}.$$
这样一来，由表示式(1)可以得到
$$w=f(z)=\frac{a\left(z+\frac{b}{a}\right)}{c\left(z+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}\cdot\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}.$$
由于 $w=f(z)$将边界 $\operatorname{Im} z=0$ 变到边界 $|w|=1$, 因此令 $z=x$(实数)后，就得到
$$\left|\frac{a}{c}\cdot\frac{x-\alpha}{x-\bar{\alpha}}\right|=1,\quad 即\quad \left|\frac{a}{c}\right|=1.$$

由此得到 $\frac{a}{c}=e^{i\theta_0}$ （θ_0 是某个实数）.

最后就得到

$$w=f(z)=e^{i\theta_0}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}},\ \operatorname{Im}\alpha>0\quad(\theta_0\text{ 为实数}).\qquad(21)$$

反之，形如(21)的分式线性变换也必将 $\operatorname{Im}z>0$ 变到 $|w|=1$. 事实上，当 $z=x$（实数）时，有

$$|w|=\left|e^{i\theta_0}\frac{x-\alpha}{x-\bar{\alpha}}\right|=1,$$

即它将实轴变到 $|w|=1$. 此外，上半平面有一点 α 变到圆心 $w=0$，因此根据定理 6，它必将 $\operatorname{Im}z>0$ 变到 $|w|<1$.

总结上面的讨论，得到下面的定理：

定理 9 分式线性变换将 $\operatorname{Im}z>0$ 变到 $|w|<1$ 的充要条件是：它具有形式(21).

注 用同样的方法可以证明：分式线性变换将 $\operatorname{Im}z>0$ 变到 $|w|>1$ 的充要条件是：

$$w=e^{i\theta_0}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}},\quad\text{其中 }\operatorname{Im}\alpha<0\quad(\theta_0\text{ 为实数}).\qquad(22)$$

【例 4】 求将 $\operatorname{Im}z>0$ 变到 $|w|<1$ 且将 $z=i$ 变到 $w=0$ 的分式线性变换.

解：由公式(21)得到

$$w=e^{i\theta_0}\frac{z-i}{z+i}\quad(\theta_0\text{ 为任何实数}).$$

3. 将单位圆内部变到单位圆内部的分式线性变换

设分式线性变换 $w=f(z)$ 将单位圆 $|z|<1$ 变到单位圆 $|w|<1$，则它必将某一点 α ($|\alpha|<1$) 变到 $w=0$. 同时，根据分式线性变换保持对称点的不变性质，它必将 $z=\alpha$ 关于 $|z|=1$ 的对称点 $z=\frac{1}{\bar{\alpha}}$ 变到 $w=0$ 关于 $|w|=1$ 的对称点 $w=\infty$. 因

此，若设

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{1}$$

则由 $0=f(\alpha)$ 得到 $a\alpha+b=0$，即

$$\alpha=-\frac{b}{a};$$

由 $\infty=f\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)$ 得到

$$0=c\frac{1}{\bar{\alpha}}+d,$$

即
$$\frac{1}{\bar{\alpha}}=-\frac{d}{c}.$$

这样一来，由表示式(1)可以得到

$$w=f(z)=\frac{a}{c}\cdot\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}=\frac{a}{c}\cdot\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\bar{\alpha}}}$$

$$=-\frac{a}{c}\bar{\alpha}\cdot\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}.$$

由于 $w=f(z)$ 将边界 $|z|=1$ 变到边界 $|w|=1$，因此令 $z=e^{i\theta}$ (θ 为实数)，就得到

$$1=|w|=\left|-\frac{a}{c}\bar{\alpha}\right|\left|\frac{e^{i\theta}-\alpha}{1-\bar{\alpha}e^{i\theta}}\right|$$

$$=\left|-\frac{a}{c}\bar{\alpha}\right|\left|\frac{1}{e^{i\theta}}\right|\left|\frac{e^{i\theta}-\alpha}{e^{-i\theta}-\bar{\alpha}}\right|=\left|-\frac{a}{c}\bar{\alpha}\right|,$$

即
$$-\frac{a}{c}\bar{\alpha}=e^{i\theta_0}\quad(\theta_0\text{ 为实数}).$$

由此得到

$$w=e^{i\theta_0}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z},\quad\text{其中 }|\alpha|<1,\ \theta_0\text{ 为实数}. \tag{23}$$

反之，形如(23)的分式线性变换也必将 $|z|<1$ 变到 $|w|<1$。事实上，当 $z=e^{i\theta}$，θ 为实数时，有

$$|w|=\left|e^{i\theta_0}\frac{e^{i\theta}-\alpha}{1-\bar{\alpha}e^{i\theta}}\right|=|e^{i\theta_0}|\left|\frac{1}{e^{i\theta}}\right|\left|\frac{e^{i\theta}-\alpha}{e^{-i\theta}-\bar{\alpha}}\right|=1,$$

即它将 $|z|=1$ 变到 $|w|=1$. 此外，在单位圆内有一点 $z=\alpha$ ($|\alpha|<1$)变到 $w=0$, 因此根据定理 6, 它必将 $|z|<1$ 变到 $|w|<1$.

总结上面的讨论，得到下面的定理：

定理 10 分式线性变换将 $|z|<1$ 变到 $|w|<1$ 的充要条件是：它具有形式(23).

注 用同样的方法可以证明：分式线性变换将 $|z|<1$ 变到 $|w|>1$ 的充要条件是：

$$w=e^{i\theta_0}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}, \quad 其中 |\alpha|>1, \ \theta_0 是实数. \tag{24}$$

【例 5】 求分式线性变换 $w=f(z)$, 它将 $|z|<1$ 变到 $|w|<1$, 并还将 $z=\frac{1}{2}$ 变到 $w=0$, 且满足 $f'\left(\frac{1}{2}\right)>0$.

解：由公式(23)得到 $w=f(z)$ 的形式为：

$$w=f(z)=e^{i\theta_0}\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z} \quad (\theta_0 \text{ 为实数}).$$

由此得到

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{i\theta_0}\left.\frac{\left(1-\frac{1}{2}z\right)+\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)^2}\right|_{z=\frac{1}{2}}=e^{i\theta_0}\frac{4}{3},$$

即
$$\operatorname{Arg} f'\left(\frac{1}{2}\right)=\theta_0.$$

根据条件 $f'\left(\frac{1}{2}\right)>0$, 即 $\operatorname{Arg} f'\left(\frac{1}{2}\right)=2k\pi$ (k 为整数), 就可得到 $\theta_0=2k\pi$. 这样一来，就得

$$w=\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}=\frac{2z-1}{2-z}.$$

【例 6】 求分式线性变换 $w=f(z)$，它将 $|z|<1$ 变到 $|w|<1$，且满足 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{i}{2}$ 与 $f'\left(\frac{1}{2}\right)>0$.

解：首先求出将 $|z|<1$ 变到 $|\zeta|<1$，且将 $z=\frac{1}{2}$ 变到

$$\zeta=0,\quad g'\left(\frac{1}{2}\right)>0$$

的分式线性变换 $\zeta=g(z)$. 由例 5 知道，这个变换就是

$$\zeta=g(z)=\frac{2z-1}{2-z}.$$

现在再求将 $|w|<1$ 变到 $|\zeta|<1$，且将 $w=\frac{i}{2}$ 变到

$$\zeta=0,\quad \varphi'\left(\frac{i}{2}\right)>0$$

的分式线性变换 $\zeta=\varphi(w)$. 由公式(23)可以得到这个变换的形式为

$$\zeta=\varphi(w)=e^{i\theta_0}\frac{w-\frac{i}{2}}{1+\frac{i}{2}w}.$$

由此得到

$$\varphi'\left(\frac{i}{2}\right)=e^{i\theta_0}\left.\frac{\left(1+\frac{i}{2}w\right)-\frac{i}{2}\left(w-\frac{i}{2}\right)}{\left(1+\frac{i}{2}w\right)^2}\right|_{w=\frac{i}{2}}=e^{i\theta_0}\frac{4}{3}.$$

从条件 $\varphi'\left(\frac{i}{2}\right)>0$ 就可得到 $\theta_0=2k\pi$（k 为整数）. 因而有

$$\zeta=\varphi(w)=\frac{w-\frac{i}{2}}{1+\frac{i}{2}w}=\frac{2w-i}{2+iw}.$$

设 $\zeta=\varphi(w)$ 的反函数为 $w=\varphi^{-1}(\zeta)$，则函数

$$w=\varphi^{-1}[g(z)]$$

就能满足全部要求了．事实上，由于 $\zeta=g(z)$ 将 $|z|<1$ 变到 $|\zeta|<1$，而 $w=\varphi^{-1}(\zeta)$ 又将 $|\zeta|<1$ 变到 $|w|<1$，因此

$$w=\varphi^{-1}[g(z)]$$

将 $|z|<1$ 变到 $|w|<1$．此外有

$$\varphi^{-1}\left[g\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\varphi^{-1}(0)=\frac{i}{2}.$$

及

$$(\varphi^{-1}[g(z)])'_{z=\frac{1}{2}}=\varphi^{-1\prime}\left[g\left(\frac{1}{2}\right)\right]g'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\varphi^{-1\prime}(0)g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\varphi'\left(\frac{i}{2}\right)}g'\left(\frac{1}{2}\right)>0.$$

因此它满足全部要求．为了求出 $w=\varphi^{-1}[g(z)]$，有

$$\varphi(w)=g(z),$$

即
$$\frac{2w-i}{2+iw}=\frac{2z-1}{2-z}.$$

由此解出
$$w=\frac{2(i-1)+(4-i)z}{(4+i)-2(1+i)z}.$$

这三类分式线性变换是非常重要的，今后会不断地用到它们．需要指出的是：今后需证明，若单叶解析函数将圆内变到圆内，则它必是分式线性函数．因此，在单叶解析函数类中来寻找这三类典型区域的变换时，它们也只可能具有形式为(19)～(24)．

【例 7】 圆心分别在 $z=1$ 及 $z=-1$、半径都是 $\sqrt{2}$ 的圆周所围的包含 $z=0$ 的区域(见图 7-14a)在变换 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ 下,变成怎样的区域?

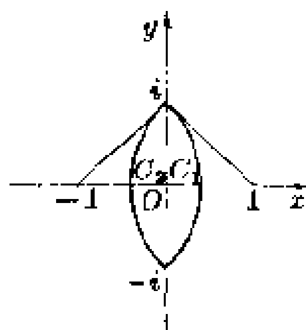


图 7-14a

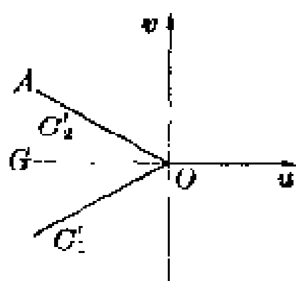


图 7-14b

解：显然，这两个圆周的交点为 $z=\pm i$，且在 $z=\pm i$ 处这两个圆周的切线分别经过点 $z=\pm 1$，因此这两对切线都是正交的．交点 $z=-i$ 在经过变换后变到 $w=\infty$；交点 $w=i$ 在经过变换后变到 $w=0$．根据分式线性变换的保持圆周不变的性质知，这两个圆周就变成两条直线，两个圆弧就变成两条从原点出发的射线．根据保角性，这两个射线在原点处的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$．

显然，在虚轴上的线段 $z=iy$，$-1<y<1$，在此变换下，变到 $w=\dfrac{y-1}{y+1}<0$，即变到负实轴．因此，同样根据保角性，C_1 与 C_2 的象 C_1' 与 C_2' 与负实轴的交角是 $\dfrac{\pi}{4}$．这样一来，根据定理 6 就可看出：变换 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ 将图 8-14a 中的区域变到区域

$$\frac{3\pi}{4}<\arg w<\frac{5\pi}{4}.$$

习 题 7·2

1. 求将 $w=\dfrac{3z+4}{iz-1}$ 分解为四个简单变换的组合.

2. 求将顶点在 0、1、i 的三角形内部变到顶点为 0、2、$1+i$ 的三角形内部的分式线性变换.

3. 在变换 $w=\dfrac{1}{z}$ 下,求下列曲线的象:

   (1) $x^2+y^2=ax$ （a 是实数）; (2) $y=kx$ （k 是实数）.

4. 求将下列区域变到本身的整线性变换 $w=\alpha z+\beta$ 的一般形式:

   (1) $0<x<1$; (2) $y=x$ 及 $y=x-1$ 所围的带形区域.

5. 试证明 z_1 与 z_2 关于圆周 $Az\bar{z}+B\bar{z}+\bar{B}z+D=0$ 对称的充要条件是:

$$Az_1\bar{z}_2+B\bar{z}_2+\bar{B}z_1+D=0.$$

6. 用分析方法证明分式线性变换具有保持关于圆周对称点不变的性质.

   [提示:用上一个习题.]

7. 求所有使 $z=\pm1$ 对应地变到 $w=\pm1$ 的分式线性变换.

8. 求分式线性变换,它将 -1、i、$1+i$ 对应地变到

   (1) $0, 2i, 1-i$; (2) $i, \infty, 1$.

9. 下列函数将下列区域变到什么区域?

   (1) $x>0, y>0,\ w=\dfrac{z-i}{z+i}$;

   (2) $|z|<1, \operatorname{Im} z>0,\ w=\dfrac{2z-i}{2+iz}$;

   (3) $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4},\ w=\dfrac{z}{z-1}$.

10. 求将上半平面变到上半平面,且将 0、i 对应地变到 1、$2i$ 的分式线性变换.

11. 求分式线性变换 $w=f(z)$,它将 $\operatorname{Im} z>0$ 变到 $|w|<1$,且满足

$$f(i)=0,\quad \arg f'(i)=\frac{\pi}{2}.$$

12. 求分式线性变换 $w=f(z)$,它将 $\operatorname{Im} z>0$ 变到 $|w-w_0|<R$,且满足

$f(i)=w_0,\ f'(i)>0.$

13. 求分式线性变换 $w=f(z)$，它将 $|z|<1$ 变到 $|w|<1$，且满足

$$f(0)=a,\ |a|<1,\ f'(0)>0.$$

14. 求将 $|z|<1$ 变到 $|w|<1$，且满足下列条件的分式线性变换

$$w=f(z):$$

(1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ \arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=0;$

(2) $f(a)=a,\ \arg f'(a)=\alpha,\ |a|<1,\ \alpha$ 是实数.

15. 求分式线性变换 $w=f(z)$，它将 $|z|<1$ 变到 $|w-1|<1$，且满足

$$f(0)=\frac{1}{2},\ f(1)=0.$$

16. 求将 $\operatorname{Im} z>0$ 变到 $\operatorname{Im} w<0$，且把 z 平面上的线段 $(-1,1)$ 变到 w 平面上的射线 $(0,+\infty)$ 的分式线性变换.

17. 求把 $\operatorname{Im} z>0$ 上除去圆弧 $|z|=1,\ 0<\arg z<\frac{\pi}{4}$ 后的区域变到 $\operatorname{Im} w>0$ 上除去直线段 $\operatorname{Re} w=0,\ 0<\operatorname{Im} w\leqslant 1$ 后的区域的变换.

18. 求由圆心分别在 $z=2$ 及 $z=-2$ 上，半径都是 1 的两个圆周所围的区域变到圆心为 $w=0$ 的同心圆环的分式线性变换，且求此圆环的半径之比.

19. 求将圆环 $2<|z|<5$ 变到圆环 $4<|w|<10$，且满足条件 $f(5)=-4$ 的分式线性变换 $w=f(z)$.

20. 求将偏心圆环 $|z-3|>9,\ |z-8|<16$ 变到同心圆环 $\rho<|w|<1$ 的分式线性变换，并求 ρ 的值.

[提示：考虑上面 4 个圆周与实轴的交点之间的变换.]

第三节　茹科夫斯基变换

函数

$$w=f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{1}$$

称为茹科夫斯基 (Жуковский) 函数，它所实现的变换称为茹

朴夫斯基变换．这个变换有很多重要的应用．

显然，这个函数在全平面上除去 $z=0$ 以外解析；$z=0$ 是它的一级极点，其留数为 $\frac{1}{2}$；$z=\infty$ 也是它的一级极点，其留数为 $-\frac{1}{2}$．

由公式(1)得到

$$f'(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\neq 0. \tag{2}$$

因此由本章第一节定理 4 知道，它在 $z\neq 0$ 处实现保形变换．当 $z=0$ 时，$w=\infty$．为了研究 $z=0$ 处的保角性，考虑函数

$$w_1=\frac{1}{w}=\frac{2}{z+\frac{1}{z}},$$

它将 $z=0$ 变到 $w_1=0$．显然有

$$\left.\frac{dw_1}{dz}\right|_{z=0}=\left.\frac{2(1-z^2)}{(z^2+1)^2}\right|_{z=0}=2.$$

因此根据定理 4，它在 $z=0$ 处也是保角的．当 $z=\infty$ 时，$w=\infty$．为了要研究在 $z=\infty$ 处的保角性质，必需考虑变换

$$\zeta=\frac{1}{z} \quad 及 \quad w_2=\frac{1}{w},$$

因而得到
$$w_2=\frac{2}{\zeta+\frac{1}{\zeta}}.$$

显然它将 $\zeta=0$ 变到 $w_2=0$．此外有

$$\left.\frac{dw_2}{d\zeta}\right|_{\zeta=0}=\left.\frac{2(1-\zeta^2)}{(1+\zeta^2)^2}\right|_{\zeta=0}=2.$$

所以它在 $z=\infty$ 处也是保角的．

现在我们研究这个函数在什么区域中是一个单叶函数．显然，当 w 任意固定时，由(1)可以解出 $z=w+\sqrt{w^2-1}$，因此

它是一个多值函数．由此看出：我们必需限制 z 的变化范围，即限制 z 的变化区域，才有可能得到单叶函数．为此，设有两个不同的值 z_1 与 z_2 对应着同一个函数值 $f(z_1)=f(z_2)$，则得

$$z_1+\frac{1}{z_1}=z_2+\frac{1}{z_2} \quad 即 \quad z_1-z_2=\frac{z_1-z_2}{z_1 z_2}.$$

因为 $z_1\neq z_2$，由此得 $z_1 z_2=1$．这样就可看出：只要在 z 平面上能找到一个区域，使得在这个区域上任意两个不同的点 z_1 与 z_2 不可能满足 $z_1 z_2=1$，则这个区域就是茹科夫斯基函数的单叶性区域了．显然，这样的区域可以很多，我们在这里只考虑四个最典型的单叶性区域：

1) $|z|<1$； 2) $|z|>1$； 3) $\operatorname{Im} z>0$； 4) $\operatorname{Im} z<0$.

下面我们研究茹科夫斯基函数把这些区域分别变到什么区域：

考虑圆周 $|z|=r$．令 $z=re^{i\theta}$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$，则由(1)得到

$$w=u+iv=\frac{1}{2}\left(re^{i\theta}+\frac{1}{re^{i\theta}}\right),$$

即

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta, \\ v=\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta. \end{cases} \tag{3}$$

由此看出：茹科夫斯基变换将圆周 $|z|=r$ 变到椭圆

$$\frac{x^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right]^2}+\frac{y^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right]^2}=1, \tag{4}$$

其中心在原点，长半轴的长为 $\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$，短半轴的长为

$$\frac{1}{2}\left|r-\frac{1}{r}\right|,$$

焦点在实轴上，为

$$c=\pm\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right]^2-\left[\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right]^2}=\pm 1.$$

设$|z|=r<1$. 从公式(3)容易看出：当r从0单调地变到1时，椭圆(4)的长半轴$a=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$单调地从$+\infty$下降到1；而短半轴$b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)$也单调地从$+\infty$下降到0. 当$r=1$时，$v=0$，而$u$的值在区间$[-1, 1]$上，且当$0\leqslant\theta\leqslant\pi$时，$u$从1单调下降到$-1$；而在$\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi$时，$u$再从$-1$上升到1. 因此$|z|=1$变到实轴上的线段$[-1, 1]$，但在此线段上来回走一遍. 这样一来，茹科夫斯基函数就将$|z|<1$双方单值地保角映射到w平面上除去$[-1, 1]$以外的区域E_1.

由(3)进一步还可以看出：当z在上半个圆周上变化时，即$|z|=r<1$, $0\leqslant\theta<\pi$，由于$v<0$，因此它就对应着下半个椭圆；当z在下半个圆周上变化时，即$|z|=r<1$, $\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，由于$v>0$，因此它就对应着上半个椭圆. 特别地，上半个圆$|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$就对应着下半平面；下半个圆$|z|<0$, $\operatorname{Im} z<0$就对应着上半平面. 边界$|z|=1$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$及$|z|=1$, $\operatorname{Im} z\leqslant 0$就对应着线段$[-1, 1]$；线段$[-1, 0)$就对应着实轴上从$-1$到$-\infty$的射线；线段$(0, 1]$就对应着实轴上从$+\infty$到1的射线(见图7-15).

由公式(3)还可以看到：从原点出发的射线$\arg z=\varphi$, $|z|<1$，在此变换下，变到双曲线中一支的一半. 事实上，设$\varphi=0$，当r从0单调地变到1时，已知$v=0$，而u从$+\infty$单调地变到$+1$；当$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$时，则由公式(3)可以得到

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi}=1. \tag{5}$$

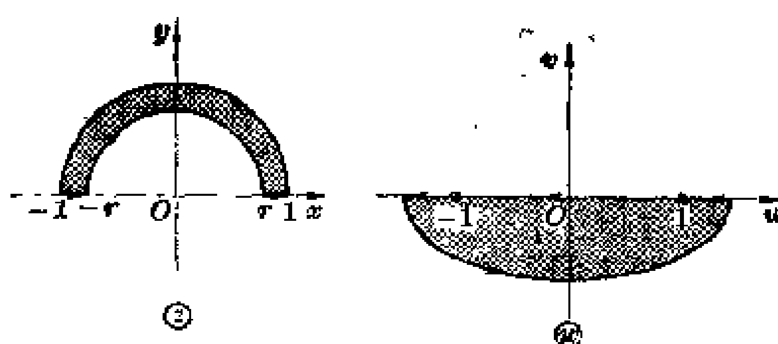


图 7-15

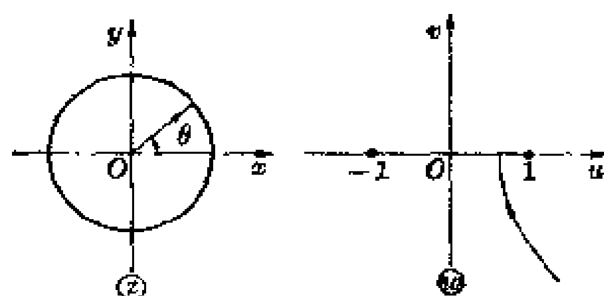


图 7-16

这是双曲线方程,其实半轴的长为 $\alpha=\cos\varphi$, 虚半轴长为 $\beta=\sin\varphi$, 焦点仍为 $C=\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\pm1$. 进一步从公式(3)还可以看出：当 r 从 0 单调上升地变到 1 时, u 从 $+\infty$ 单调下降地变到 $\cos\varphi$, 而 v 取负值, 单调地从 $-\infty$ 变到 0(见图 7-16). 当 $|z|<1$, $\arg z=\pi-\varphi$, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$时,容易看出:它也变到双曲线另一支所在的下半平面的一部分, 且与上面那一部分是对称的. 同样, $|z|<1$, $\arg z=2\pi-\varphi$ 及 $|z|<1$, $\arg z=\pi+\varphi$ $\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 对应地变到双曲线 (5) 在上半平面上的两个半支. 当

$$\arg z=\frac{\pi}{2},$$

r 从 0 单调地变到 1 时, 从(3)可以看出 $u=0$, 但 v 从 $-\infty$

单调上升地变到0；当$\arg z=\pi$，r从0单调地变到1时，从(3)可知$v=0$，而u从$-\infty$单调地变到-1；当

$$\arg z=\frac{3}{2}\pi,$$

r从0单调地变到1时，从(3)可以看出$u=0$，而v从$+\infty$单调地下降到0.

这样，在$|z|<1$中，我们就很清楚地知道茹科夫斯基函数的变换特性了.

设$|z|=r>1$. 用同样的方法可知道，茹科夫斯基函数将$|z|=r>1$变到长半轴为

$$a=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right),$$

短半轴为

$$b=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)$$

的椭圆(4)，但把上半个圆周变成上半个椭圆；把下半个圆周变成下半个椭圆. 因此，它也把$|z|>1$双方单值地保形变换到全平面除去线段$[-1, 1]$后的区域E_1. 此外，从单位圆周上出发的射线$\arg z=\varphi$，$|z|=r$ $(1\leqslant r<+\infty)$也变到双曲线(5)中一支的一半，变换的具体情况与上面是类似的.

这样一来，茹科夫斯基函数在区域E_1中就有两个单值反函数

$$z=w+\sqrt{w^2-1}, \tag{6}$$

它们分别将区域E_1变到单位圆的内部$|z|<1$及外部

$$|z|>1.$$

这两个单值反函数称为两个单值解析分支. 此外，从上面介绍的变换性质可以知道，当w从下半平面趋向于线段$(-1,1)$上的值u时，第一个解析分支就从上半个圆$|z|<1$内趋向于圆周$|z|=1$上的值，其幅角为$\varphi=\cos^{-1}u$；而第二个解析分支

却从下半个圆外 $|z|>1$ 趋向于 $|z|=1$ 上的值，其幅角为 $\varphi=-\cos^{-1}u$. 同样，当 w 从上半平面趋向于 $(-1, 1)$ 上的值 u 时，第一个解析分支就从下半个圆 $|z|<1$ 内趋向于 $|z|=1$ 上的值，其幅角为 $\varphi=-\cos^{-1}u$; 而第二个解析分支却从上半个圆 $|z|<1$ 内趋向于 $|z|=1$ 上的值，其幅角为

$$\varphi=\cos^{-1}u.$$

因此，第一个分支在下半平面上的极限值与第二个分支在上半平面上的极限值相等；而第二个分支在上半平面上的极限值与第一个分支在下半平面上的极限值相等. 这样一来，茹科夫斯基的反函数(6)的黎曼曲面就是将第一个区域 E_1 在 $(-1, 1)$ 的下沿与第二个区域 E_2 在 $(-1, 1)$ 的上沿相接；而第一个区域 E_1 在 $(-1, 1)$ 的上沿与第二个区域 E_2 在 $(-1, 1)$ 的下沿相接. 尽管后一种相接在实际上不可能——因为中间隔了一层，但是我们仍然看作"相接". 这个黎曼曲面的自然边界是 ± 1. 在扩充平面上 $z=\infty$ 也不是属于自然边界.

如果考虑 $\text{Im}\, z>0$ 作为茹科夫斯基函数的单叶性区域，则已知 $\text{Im}\, z>0$, $|z|<1$ 双方单值地变到 $\text{Im}\, w<0$, 且 $\text{Im}\, z>0$, $|z|=1$ 变到 $(1, -1)$; 线段 $(-1, 0)$ 变到实轴上的从 -1 到 $-\infty$ 的射线；线段 $(0, 1)$ 变到实轴上的从 $+\infty$ 到 1 的射线. 此外，它还将 $\text{Im}\, z>0$, $|z|>1$ 双方单值地变到 $\text{Im}\, w>0$, 且把实轴上的射线 $(1, +\infty)$ 变到 w 平面实轴上的射线 $(1, +\infty)$; 把实轴上的射线 $(-\infty, -1)$ 变到实轴上的射线 $(-\infty, -1)$. 这样一来，茹科夫斯基函数就把上半平面 $\text{Im}\, z>0$ 双方单值地保形变换到全平面上除去射线 $(-\infty, -1)$ 及 $(1, +\infty)$ 后的区域 E_2, 其边界上的对应关系可以参看图 7-17.

如果考虑 $\text{Im}\, z<0$ 作为茹科夫斯基函数的单叶性区域，则按上述同样的讨论可知：它也将 $\text{Im}\, z<0$ 双方单值地变换

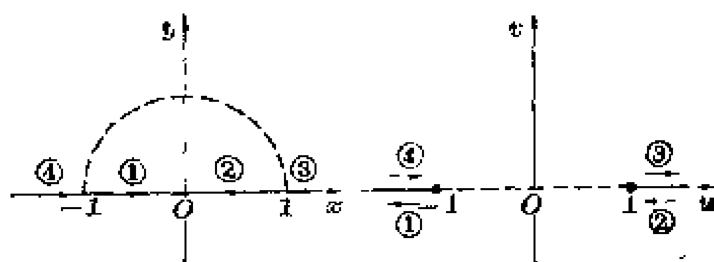


图 7-17

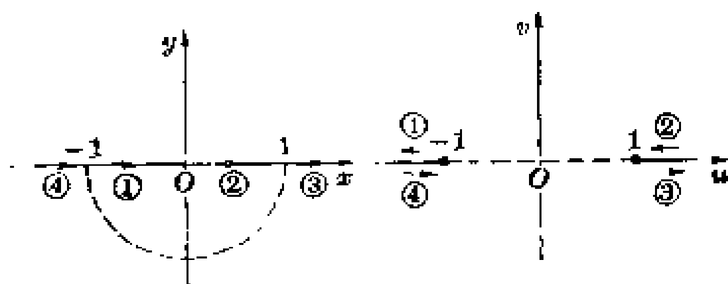


图 7-18

到区域 E_2, 其边界上的对应关系可以参看图 8-18.

我们也可以在区域 E_2 中得到茹科夫斯基函数的反函数(6)的两个单值解析分支, 其中一个将 E_2 变到上半平面, 另一个则将 E_2 变到下半平面. 它的黎曼曲面的构造方法与上面类似, 其自然边界也只是两个点 ± 1. 读者有兴趣的话, 可以仿照上面的讨论, 自己试行讨论一下.

【例 1】 求将 $\operatorname{Im} z>0$, $|z|<1$ 变到 $|w|<1$ 的双方单值保形变换.

解: 首先应用茹科夫斯基函数 $w_1=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 将区域 $\operatorname{Im} z>0$, $|z|<1$ 变到 $\operatorname{Im} w_1<0$. 应用函数 $w_2=-w_1$ 将 $\operatorname{Im} w_1<0$ 变到 $\operatorname{Im} w_2>0$. 任取上半平面上的点 $w_2=i$, 根据第二节定理 9, 函数 $w=\frac{w_2-i}{w_2+i}$ 将 $\operatorname{Im} w_2>0$ 变到 $|w|<1$. 这样一来, 这三个函数的复合就满足了要求:

$$w=\frac{-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-i}{-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+i}=\frac{z^2+2iz+1}{z^2-2iz+1}.$$

【例 2】 求将单位圆$|z|<1$内除去两条割线$(-1, -1+h]$与$[1-h, 1)$$(0<h<1)$后的区域$D$双方单值保形变换到$|w|<1$的函数.

解：已知茹科夫斯基函数$w_1=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$双方单值保形变换$|z|<1$到全平面除去割线$[-1, 1]$后的区域，且将线段$(-1, -1+h]$与$[1-h, 1)$分别变到线段$[-\delta, -1)$及$(1, \delta]$ $\left[其中\ \delta=\frac{1}{2}\left(1-h+\frac{1}{1-h}\right)>1\right]$. 这样一来，函数

$$w_1=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

就将区域D双方单值保形变换到全平面除去割线$[-\delta, \delta]$后的区域D_1. 函数$w_2=\frac{w_1}{\delta}$就将区域D_1变到全平面除去割线$[-1, 1]$后的区域E_1. 最后，茹科夫斯基函数的反函数

$$w=w_2+\sqrt{w_2^2-1}$$

的一支就将区域E_1双方单值保形变换到$|w|<1$. 这三个函数的复合就能满足要求：

$$w=\frac{z+\frac{1}{z}}{(1-h)+\frac{1}{1-h}}+\sqrt{\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{(1-h)+\frac{1}{1-h}}\right)^2-1}.$$

习 题 7·3

1. 求将单位圆外$|z|>1$除去两个线段$[-h, -1]$与$[1, h]$$(h>1)$后的区域双方单值保形变换到$|w|>1$的函数.

2. 求将单位圆 $|z|<1$ 内除去线段 $[he^{i\varphi}, e^{i\varphi}]$ $(0<h<1)$ 的区域双方单值保形变换到 $|w|<1$ 的函数.
3. 求将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 上除去圆弧：$|z|=1$, $0<\arg z\leqslant\varphi<\pi$ 的区域双方单值保形变换到上半平面 $\operatorname{Im} w>0$ 的函数.

第四节　几个初等函数实现的变换

4.1 幂函数与根式函数实现的变换

考虑幂函数 $w=z^n$ $(n\geqslant 2$ 为整数). 显然

$$\frac{dw}{dz}=nz^{n-1},$$

因此当 $z\neq 0$ 时,

$$\frac{dw}{dz}\neq 0.$$

由此推出：函数 $w=z^n(n\geqslant 2)$ 在 $z\neq 0$ 处实现了保形变换. 当 $z=0$ 时, $w=0$. 为了研究在 $z=0$ 处的变换性质,考虑任意一点 $z=re^{i\theta}$ 对应于 $w=\rho e^{i\varphi}=r^n e^{in\theta}$, 由此得到

$$\rho=r^n,\quad \varphi=n\theta. \tag{1}$$

因此在变换 $w=z^n$ 下, 把向量的模 $|z|=r$ 变到 r^n, 而幅角放大 n 倍,因此当 $n\geqslant 2$ 时,就没有保角性质了.

现在研究单叶性区域. 设 $z_1\neq z_2$, 但 $z_1^n=z_2^n$. 令 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$; $z_2=r_2e^{i\theta_2}$. 由此得 $r_1^n e^{in\theta_1}=r_2^n e^{in\theta_2}$. 因此就有

$$r_1^n=r_2^n,\quad 即\quad r_1=r_2; \tag{2}$$

$$n\theta_1=n\theta_2+2k\pi,\quad 即\quad \theta_1-\theta_2=\frac{2k\pi}{n}\quad (k\ 为整数). \tag{3}$$

由此看出：任何一个区域只要其中有任何两个不同的点 z_1 与 z_2 不能同时满足等式(2)及(3), 那么此区域就是一个单叶性

区域. 例如,下列的 n 个张角为 $\frac{2\pi}{n}$ 的角形区域都是单叶性区域:

$$\frac{2k\pi}{n}+\theta_0<\arg z<\frac{2(k+1)\pi}{n}+\theta_0, \tag{4}$$

其中 θ_0 可取任何实数. 这些区域记为 D_{k,θ_0}, 当 $\theta_0=0$ 时, 记为 $D_k(0\leqslant k\leqslant n)$.

由变换公式(1)可以看出: 它把圆周 $|z|=r_0$ 变到圆周 $|w|=r_0^n$, 且当 $\arg z$ 在 $|z|=r_0$ 上按逆时针方向绕行一圈时, $0\leqslant\arg z\leqslant 2\pi$, w 就在 $|w|=r_0^n$ 上按逆时针方向绕行 n 圈, $0\leqslant\arg w\leqslant 2n\pi$. 它把射线 $\arg z=\theta_1$ 变到射线 $\arg w=n\theta_1$. 容易看出: 它把单叶性区域 D_k 变到 w 平面上的区域 $0<\arg w<2\pi$.

现在考虑幂函数 $w=z^n$ 的反函数,也即根式函数

$$z=\sqrt[n]{w}.$$

为了将 z 看作自变量,我们写为

$$w=\sqrt[n]{z},$$

它是 $z=w^n$ 的反函数. 令 $z=re^{i\theta}$, 可知函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 有 n 个值:

$$w_k=(\sqrt[n]{z})_k=r^{\frac{1}{n}}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1). \tag{5}$$

它们在任何角形区域 $\theta_1<\arg z<\theta_1+2\pi$ 中都是单值解析函数, 且将这个区域变到区域 $\frac{\theta_1}{n}<\arg w<\frac{\theta_1}{n}+\frac{2\pi}{n}$, 特别地将任意一个角形区域 $0<\arg z<\alpha\leqslant 2\pi$ 变到区域

$$0<\arg w<\frac{\alpha}{n}\leqslant\frac{2\pi}{n}.$$

这显然有

$$\frac{dw_k}{dz}=\frac{d(\sqrt[n]{z})_k}{dz}=\frac{1}{\dfrac{dz}{dw_k}}$$

$$=\frac{1}{nw_k^{n-1}}=\frac{1}{n(\sqrt[n]{z})_k^{n-1}}.$$

【例 1】 求将第二节例 7 的区域单叶地保形变换到 $\operatorname{Im} w>0$ 的函数.

解：由第二节例 7 知道，函数 $w_1=\dfrac{z-i}{z+i}$ 将例 7 中的区域单叶地保形变换到图 7-14b 中的区域 G_1，其中射线 OA 与正实轴的倾角为 $\dfrac{3}{4}\pi$. 函数 $w_2=e^{-\frac{3}{4}\pi i}w_1$ 将 G_1 变到第一象限 $0<\arg w_2<\dfrac{\pi}{2}$. 由此，函数 $w=w_2^2$ 就将第一象限

$$0<\arg w_1<\frac{\pi}{2}$$

变到上半平面 $0<\arg w<\pi$. 这三个函数的复合就满足要求：

$$w=\left(e^{-\frac{3}{4}\pi i}\frac{z-i}{z+i}\right)^2=i\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2.$$

【例 2】 求将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 上除去虚轴上的线段 $(0,\ hi]$ $(h>0)$ 的区域 D（见图 7-19a）单叶地保形变换到上半平面 $\operatorname{Im} w>0$ 的函数.

解：函数 $w_1=z^2$ 将区域 D 单叶地保形变换到全平面上

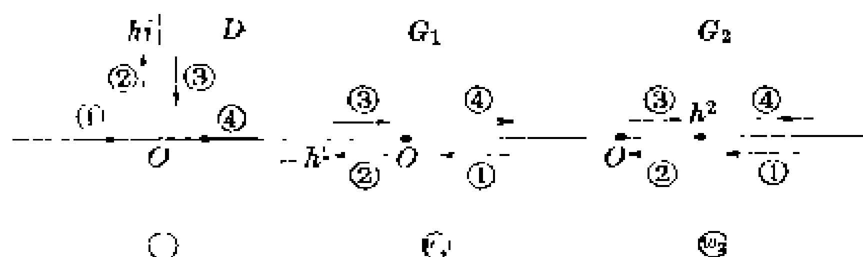


图 7-19a　　图 7-19b　　图 7-19c

除去实轴上的射线 $[-h^2, +\infty)$ 后得到的区域 G_1, 且当 z 在边界上按逆时针方向从 $z=-\infty$ 变到 $z=+\infty$ 时, w_1 在实轴上从 $+\infty$ 变到 $-h^2$, 再从 $-h^2$ 变到 $+\infty$(见图 7-19b). 函数 $w_2=w_1+h^2$ 就将区域 G_1 单叶地保形变换到全平面上除去正实轴的区域 G_2, 其边界对应关系可以见图 7-19c. 函数

$$w=\sqrt{w_2}$$

的一个分支就将区域 G_2: $0<\arg w_2<2\pi$ 单叶地保形变换到区域 $0<\arg w<\pi$. 因此这三个函数的复合就能满足要求:

$$w=\sqrt{z^2+h^2}.$$

4.2 指数函数与对数函数实现的变换

已知指数函数 $w=e^z$ 在全平面上解析, 且

$$\frac{dw}{dz}=e^z\neq 0,$$

因此由本章第一节知: 它在全平面上都实现保形变换.

现在来寻找单叶性区域. 设 $z_1\neq z_2$, 但 $e^{z_1}=e^{z_2}$. 令

$$z_1=x_1+iy_1,\quad z_2=x_2+iy_2,$$

就得到

$$e^{x_1}e^{iy_1}=e^{x_2}e^{iy_2}.$$

由此得到

$$x_1=x_2,\quad y_1-y_2=2k\pi\quad (k\text{ 是整数}). \tag{6}$$

由此看出: 任何一个区域只要其中任何两个不同的点 z_1 与 z_2 不能同时满足(6)中的两个等式, 则此区域就是单叶性区域. 例如, 下列的区域 S_k 就是单叶性区域:

$$2k\pi<\mathrm{Im}\, z<2(k+1)\pi\quad (k\text{ 是任何整数}). \tag{7}$$

现在要问指数函数把这些区域变成怎样的区域? 令 $w=\rho e^{i\varphi}$, $z=x+iy$. 由 $w=e^z$ 得 $\rho e^{i\varphi}=e^x e^{iy}$. 由此得到

$$\rho=e^x,\quad \varphi=y. \tag{8}$$

由变换公式知道：它把直线 $x=x_0$，$-\infty<y<+\infty$ 变到圆周 $\rho=e^{x_0}$；实际上，它把直线段 $x=x_0$，$2k\pi<y<2(k+1)\pi$ 变到圆周 $\rho=e^{x_0}$ 上除去点 $w=e^{x_0}$ 的圆弧。当 x_0 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，圆周 $|w|=\rho=e^{x_0}$ 就从 $|w|=\rho=0$ 单调地变到 $|w|=\rho=+\infty$，因此它将水平带 $2k\pi<y<2(k+1)\pi$ 单叶地保形变换到区域 $0<\arg w<2\pi$。同时，也可以看出：它将直线 $y=y_0$，$-\infty<x<+\infty$ 变到 w 平面上的射线 $\arg w=y_0$（见图 7-20）。

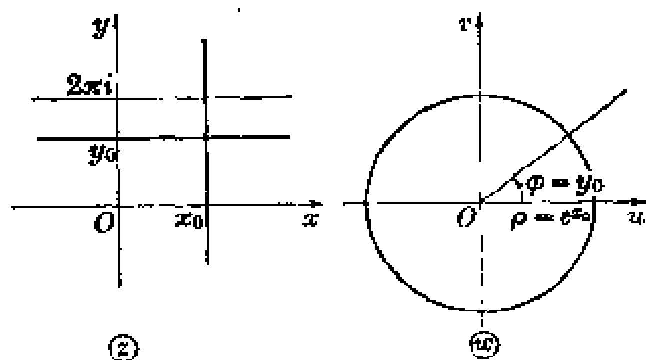


图 7-20

现在考虑指数函数 $w=e^z$ 的反函数，即对数函数

$$z=\ln w.$$

为了将 z 看作自变量，我们写成 $w=\ln z$，它是 $z=e^w$ 的反函数。令 $z=re^{i\theta}\neq 0$，$w=u+iv$，可知函数 $w=\ln z$ 有无穷多个分支：

$$w_k=\ln r+i(\theta+2k\pi)\quad (k\text{ 是整数}), \tag{9}$$

即

$$u=\ln r,\ v=\theta+2k\pi\quad (k\text{ 是整数}). \tag{10}$$

它们每一个在区域 $0<\arg z<2\pi$ 中是单值解析的。它们将圆周 $|z|=r$，$0<\arg z<2\pi$ 变到直线段 $u=\ln r$，$2k\pi<v<2(k+1)\pi$；将射线 $\arg z=\varphi_0$，$0<r<+\infty$ 变到直线 $v=\theta_0+2k\pi$，$-\infty<u<+\infty$，因此，它们就将区域 $0<\arg z<2\pi$ 变到

水平带 $2k\pi<\mathrm{Im}\, w<2(k+1)\pi$; 特别地 $w=(\ln z)_0$ (今后记作 $\ln z$)将 $0<\arg z<2\pi$ 单叶地保形变换到 $0<\mathrm{Im}\, w<2\pi$; 将角形区域 $0<\arg z<\alpha\leqslant 2\pi$ 单叶地保形变换到

$$0<\mathrm{Im}\, w<\alpha\leqslant 2\pi.$$

在区域 $0<\arg z<2\pi$ 中，有

$$\frac{d(\ln z)k}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dw_k}}=\frac{1}{e^{w_k}}\bigg|_{w_k=(\ln z)_k}=\frac{1}{z}. \tag{11}$$

考虑一般的幂函数 z^β，它是按下列方法来定义的：

$$z^\beta=z^{\beta\ln z}\quad (\beta\text{ 是复数}). \tag{12}$$

因此，一般地来说：它是一个多值函数．如果取 $\ln z$ 的一个单值解析分支 $\ln z$, $0<\arg z<2\pi$，就得到

$$w=z^\beta=e^{\beta\ln z}=e^{\beta(\ln r+i\theta)},\ z=re^{i\theta}\quad (0<\theta<2\pi). \tag{12'}$$

从对数函数及指数函数的性质知道：当 β 为实数时，函数(12)将射线 $\arg z=\theta_0$ 变到射线 $\arg w=\beta\varphi_0$．因此它将角形区域 $0<\arg z<\alpha$ 变到角形区域 $0<\arg w<\beta\alpha$．从对数函数及指数函数的单叶性区域也可以看出：当 $\alpha\leqslant 2\pi$, $\beta\alpha\leqslant 2\pi$ 时，函数(12′)就把区域 $0<\arg z<\alpha\leqslant 2\pi$ 单叶地保形变换到区域 $0<\arg w<\beta\alpha\leqslant 2\pi$.

【例 3】 求将区域 $0<\mathrm{Im}\, z<\pi$ 单叶地保形变换到 $|w|<1$ 的函数.

解：从指数函数的性质知道：函数 $w_1=e^z$ 单叶地保形变换 $0<\mathrm{Im}\, z<\pi$ 到区域 $\mathrm{Im}\, w_1>0$．又从第二节定理 9 知道，函数 $w=\dfrac{w_1-i}{w_1+i}$ 将区域 $\mathrm{Im}\, w_1>0$ 单叶地保形变换到 $|w|<1$．这两个函数的复合就满足要求：

$$w=\frac{e^z-i}{e^z+i}.$$

【例 4】 求将带形区域 $0<\operatorname{Im} z<2\pi$ 中除去水平射线

$$\operatorname{Im} z=\pi,\ -\infty<\operatorname{Re} z\leqslant 0$$

后的区域 D 单叶地保形变换到带形区域 $0<\operatorname{Im} w<2\pi$ 的函数(见图 7-21).

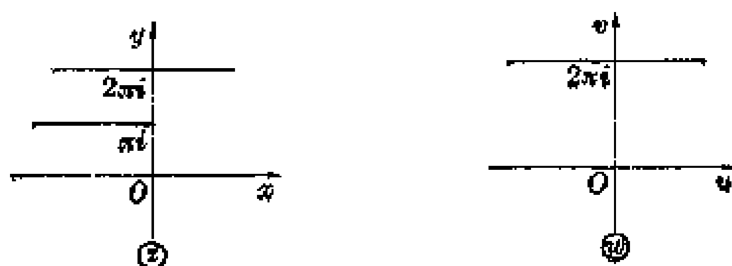


图 7-21

解：已知函数 $w_1=e^z$ 将区域 $0<\operatorname{Im} z<2\pi$ 单叶保形变换到区域 $0<\arg w<2\pi$，它还将射线 $\operatorname{Im} z=\pi$，$-\infty<\operatorname{Re} z\leqslant 0$ 变到 $\arg w_1=\pi$ 及 $|w_1|$ 从 0 到 1 的线段，即负实轴上的线段 $[-1, 0]$. 因此，函数 $w_1=e^z$ 将区域 $0<\operatorname{Im} z<2\pi$ 单叶地保形变换到全平面上除去实轴上的射线 $w\geqslant -1$ 后的区域 G_1. 显然 $w_2=w_1+1$ 将区域 G_1 单叶地保形变换到全平面上除去正实轴后的区域 G_2：$0<\arg w_2<2\pi$. 再由对数函数的性质知道，函数 $w=\operatorname{Ln} w_2$ 就将区域 G_2 单叶地保形变换到带形区域 $0<\operatorname{Im} w<2\pi$. 这样一来，这三个函数的复合就能满足要求：

$$w=\ln(e^z+1).$$

4.3 三角函数与反三角函数实现的变换

这里只介绍正弦函数 $w=\sin z$ 与余弦函数 $w=\cos z$ 以及它们的反函数所实现的变换.

1. 正弦函数 $w=\sin z$ 及其反函数 $w=\operatorname{Arg}\sin z$ 所实现的变换

已知$(\sin z)'=\cos z$，因此正弦函数 $w=\sin z$ 在全平面上除了

$$z=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\text{ 是整数})$$

以外都实现保形变换.

现在研究单叶性区域：设 $z_1\neq z_2$，有 $\sin z_1=\sin z_2$，即

$$\sin z_1-\sin z_2=0,$$

由此得
$$2\cos\frac{z_1+z_2}{2}\sin\frac{z_1-z_2}{2}=0.$$

由函数 $\sin z$ 及 $\cos z$ 的零点分布可以推出：或者

$$z_1-z_2=2(-1)^k\pi+2k\pi=2n\pi \quad (n\text{ 是整数}) \tag{13}$$

或者

$$z_1+z_2=\pm\pi+2k\pi=(2l+1)\pi \quad (l\text{ 是整数}). \tag{14}$$

由此看出：任何一个区域，只要其中任何两个不同的点 z_1 与 z_2 既不满足等式(13)又不满足等式(14)，则就是单叶性区域. 这样的单叶性区域可以很多. 例如可以取

（一）上半平面上宽度为 2π 的上半个垂直的带形区域：$\operatorname{Im}z>0$，$-\pi<\operatorname{Re}z<\pi$，或更一般的区域 G_k（见图 7-22a）：

$$\operatorname{Im}z>0,\ (2k-1)\pi<\operatorname{Re}z<(2k+1)\pi \quad (k\text{ 是整数}). \tag{15}$$

（二）宽度为 π 的垂直的带形区域 $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re}w<\frac{\pi}{2}$，或

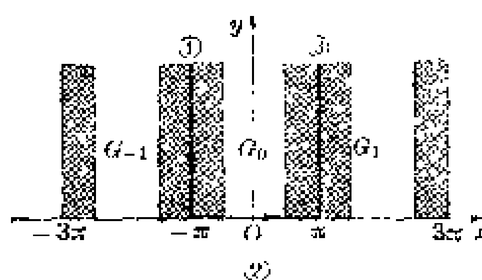


图 7-22a

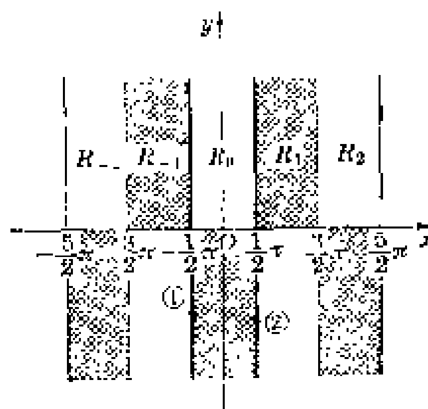


图 7-22b

更一般的区域 R_k(见图 7-22b):

$$\left(-\frac{1}{2}+k\right)\pi<\operatorname{Re} z<\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi \quad (k\text{ 是整数}). \tag{16}$$

下面研究函数 $w=\sin z$ 单叶地把区域 G_0 保形变换到怎样的区域：我们将区域 G_0 分成三部份，它们分别用阴影区域及空白区域表示；将边界也分成三部份，分别用 ①、②、③ 来表示三段直线：$\operatorname{Re} z=-\pi,\ 0\leqslant \operatorname{Im} z<+\infty$；$\operatorname{Im} z=0,\ -\pi<\operatorname{Re} z<\pi$；$\operatorname{Re} z=\pi,\ 0<\operatorname{Im} z<+\infty$. 显然，函数 $w=\sin z$ 可以分解成四个单叶保形变换的复合：

$$z_1=iz,\quad z_2=e^{z_1},\quad z_3=\frac{z_2}{i}=-iz_2,\quad w=\frac{1}{2}\left(z_3+\frac{1}{z_3}\right). \tag{17}$$

每一个函数都将前一个因变量所对应的区域单叶保形变换到适当的区域.

因此，函数 $w=\sin z$ 就将区域 G_0 单叶地保形变换到全平面上除去实轴上的线段 $[-1,1]$ 及负虚轴后的区域 F_1，其阴

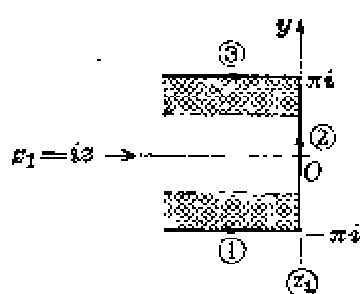


图 7-23a

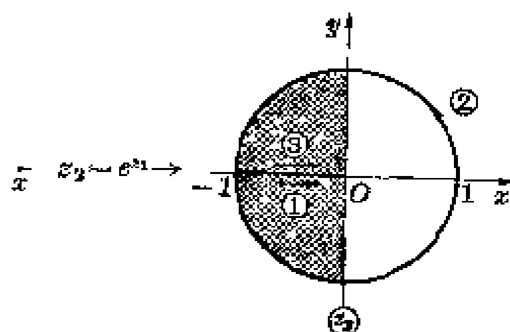


图 7-23b

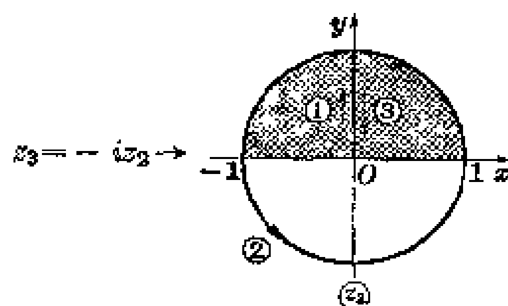


图 7-23c

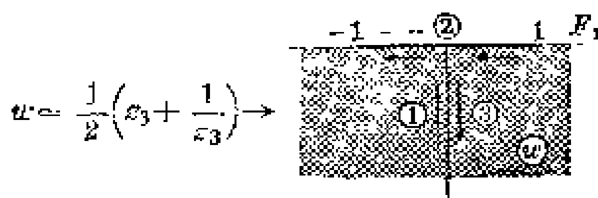


图 7-23d

影区域及空白区域的对应关系以及边界的关系也可以从图7-23看出.

由于函数 $w=\sin z$ 具有周期为 2π, 因此它也将任何一个区域 G_k (k 是整数)单叶地保形变换到区域 F_1.

仿照上述,同样可研究函数 $w=\sin z$ 将区域 R_0 单叶地保形变换到怎样的区域: 我们将区域 R_0 分成两部份: 有阴影的区域及空白区域; 将边界也分成两部份,分别用 ① 与 ② 表示直线

$$\operatorname{Re} w=-\frac{\pi}{2} \quad 及 \quad \operatorname{Re} w=\frac{\pi}{2}.$$

变换公式(17)中的每一个函数都将前一个函数中的因变量所对应的区域单叶保形变换到适当的区域.

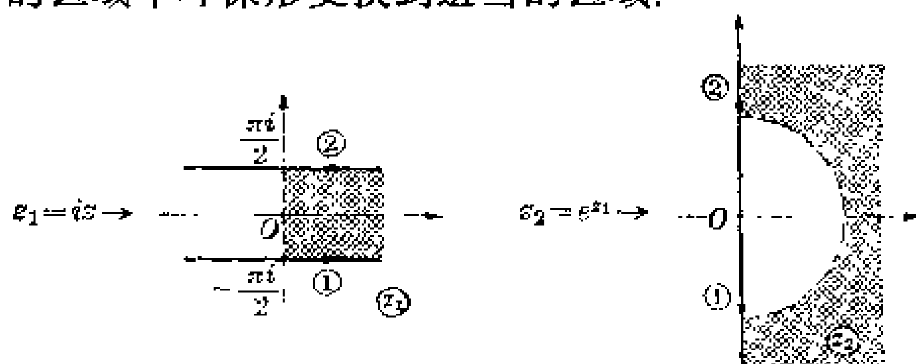


图 7-24a　　图 7-24b

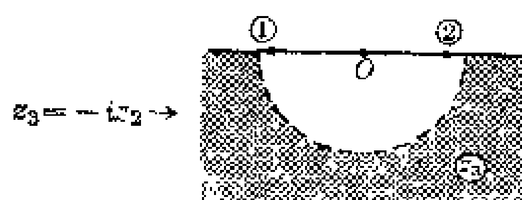


图 7-24c

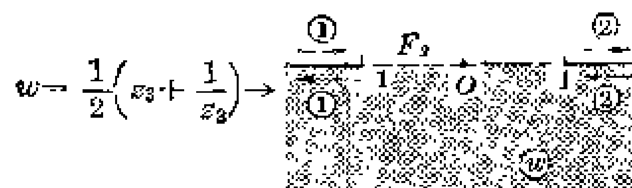


图 7-24d

因此，函数 $w=\sin z$ 就将区域 R_0 单叶地保形变换到全平面上除去实轴上的两条射线 $(-\infty, -1]$ 及 $[1, +\infty)$ 后得到的区域 F_2，其阴影区域及空白区域的对应关系以及边界的对应关系也可以从图 7-24 看出.

由函数 $w=\sin z$ 的性质知道：

$$\sin(z-k\pi)=-\sin(k\pi-z)=(-1)^k\sin z.$$

因此它也将区域 R_k 单叶地保形变换到区域 F_1，但对应的阴影区域及空白区域的变换却正好相反(参看图 7-22b).

从上面的分析可知：在区域 G_k 或 R_k 中，函数 $w=\sin z$ 有单值反函数．将此反函数记作 $z=\operatorname{Arg}\sin w$，它在区域 F_1 或 F_2 中有单值解析分支，它们分别将区域 F_1 与 F_2 对应地单叶保形变换到区域 G_k 及 R_k(k 是整数)．习惯上，常将 z 作为自变量，将 w 作为因变量，因此写作

$$w=\operatorname{Arg}\sin z,$$

它是函数 $z=\sin w$ 的反函数．为了清楚地写出其表示式，由 $z=\sin w$ 得到

$$z=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i},$$

因而有
$$e^{2iw}-2ize^{iw}-1=0.$$

解这个方程，得到

$$e^{iw}=iz\pm\sqrt{1-z^2},$$

即

$$w=\frac{1}{i}\ln(iz\pm\sqrt{1-z^2}). \tag{18}$$

显然，它是多值函数．由上面的讨论知道：它在区域 F_1 或 F_2 上有单值解析分支，且将区域 F_1 及 F_2 对应地单叶保形变换到区域 G_k 及 R_k(k 是整数).

2. 余弦函数 $w=\cos z$ 及其反函数 $w=\operatorname{Arg}\cos z$ 所实现的变换

已知 $(\cos z)'=-\sin z$，因此余弦函数 $w=\cos z$ 在全平面上除了 $z=k\pi$（k 是整数）以外都实现保形变换.

注意到

$$w=\cos z=\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=-\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right), \tag{19}$$

由 $w=\sin z$ 的单叶性区域可以找出 $w=\cos z$ 的单叶性区域. 事实上，从公式(13)、(14)及(19)可以看出：任何一个区域，只要其中任何两个点 z_1 与 z_2 既不满足

$$\left(z_1-\frac{\pi}{2}\right)-\left(z_2-\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi, \quad \text{即} \quad z_1-z_2=2n\pi \quad (n\text{ 是整数}), \tag{20}$$

又不满足

$$\left(z_1-\frac{\pi}{2}\right)+\left(z_2-\frac{\pi}{2}\right)=2(l+1)\pi, \quad \text{即} \quad z_1+z_2=2l\pi \quad (l\text{ 是整数}), \tag{21}$$

就是单叶性区域. 这样的单叶性区域可以很多. 例如可取

（一）上半平面上宽度为 2π 的垂直的带形区域：

$$\operatorname{Im} z>0,\ -\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} z<\frac{3}{2}\pi,$$

或更一般的区域 G_k^*（见图 7-25a）：

$$\operatorname{Im} z>0,\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi<\operatorname{Re} z<\frac{3}{2}\pi+2k\pi \quad (k\text{ 是整数}). \tag{22}$$

（二）宽度为 π 的垂直的带形区域：$0<\operatorname{Re} z<\pi$，或更一般的区域 R_k^*（见图 7-25b）：

$$k\pi<\operatorname{Re} z<(k+1)\pi \quad (k\text{ 是整数}). \tag{23}$$

利用函数 $w=\sin z$ 将区域 G_k 及 R_k 对应地单叶保形变换到区域 F_1 及 F_2 的性质，由公式(19)即推出，函数 $w=\cos z$

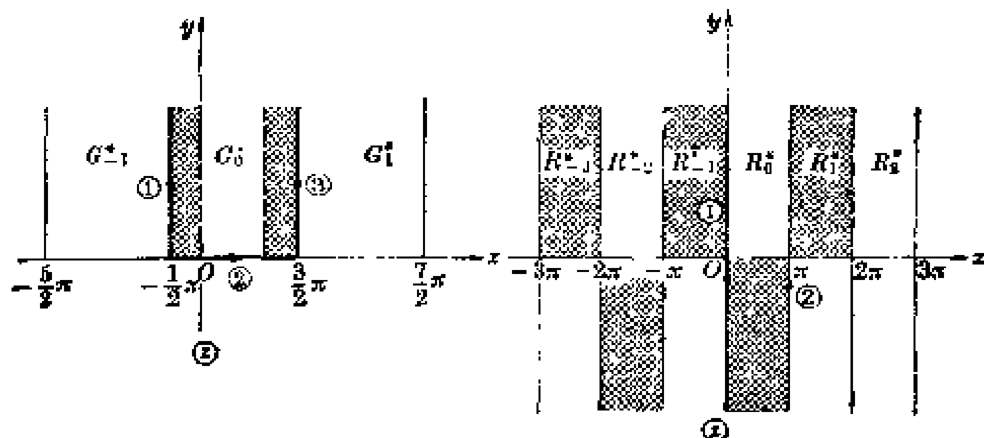
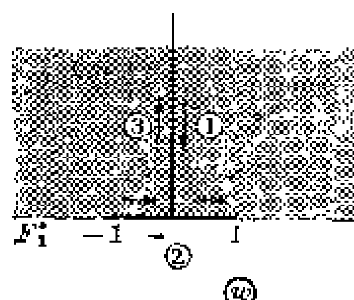


图 7-25a　　图 7-25b

将区域 G_k^* 单叶地保形变换到全平面上除去线段 $[-1, 1]$ 及正虚轴后得到的区域 F_1^*, 其阴影区域及空白区域的对应关系以及边界的对应关系可参看图 7-25a 与图 7-26a. 同样由公式(19)可推出, 函数 $w=\cos z$ 将区域 R_k^* 单叶地保形变换到全平面上除去实轴上的两条射线 $(-\infty, -1]$ 与 $[1, +\infty)$ 后的区域 F_2^*, 其阴影区域及空白区域的对应关系以及边界的对应关系可参看图 7-25b 与图 7-26b.



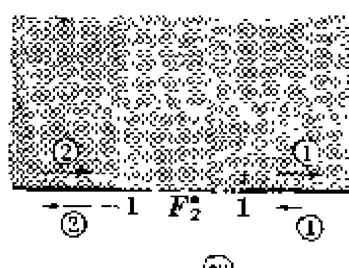


图 7-26a　　图 7-26b

从上面的讨论可以看出: 在区域 G_k^* 或 R_k^* 中, 函数 $w=\cos z$ 就有单值反函数. 将这反函数记作 $z=\operatorname{Arg}\cos w$, 它在区域 F_1^* 及 F_2^* 中就有单值解析分支, 它们分别将区域 F_1 与 F_2 对应地单叶保形变换到区域 G_k^* 及 R_k^*(k 是整数). 习惯上, 常将 z 作为自变量, 将 w 作为因变量, 因此写作

$$w=\operatorname{Arg}\cos z,$$

它是函数 $z=\cos w$ 的反函数．为了清楚地写出其表示式，由 $z=\cos w$ 得到 $z=\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$，因而有

$$e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0.$$

解这方程，得到 $e^{iw}=z\pm\sqrt{z^2-1}$，即

$$w=\frac{1}{i}\ln(z\pm\sqrt{z^2-1}). \tag{24}$$

显然，它是多值函数．由上面的讨论知道，它在区域 F_1^* 或 F_2^* 上有单值解析分支，且将区域 F_1^* 及 F_2^* 对应地单叶保形变换到区域 G_k^* 及 R_k^*(k 是整数)．

【例 5】 求将区域 $\operatorname{Im} z>0$, $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} z<\frac{\pi}{2}$ 单叶地保形变换到自身

$$\operatorname{Im} w>0,\quad -\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} w<\frac{\pi}{2},$$

且把点 $z=\pm\frac{\pi}{2}+i\delta(\delta>0)$ 对应地变到点 $w=\pm\frac{\pi}{2}$ 的函数(参看图 7-27)．

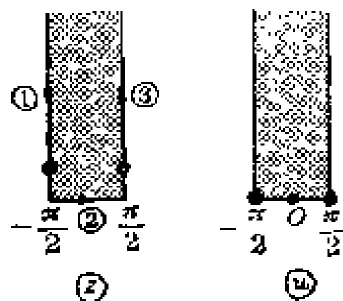


图 7-27



图 7-28a

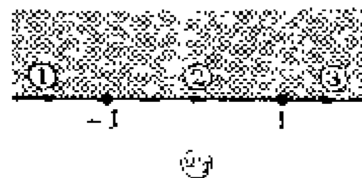


图 7-28b

解：由上面的讨论知道，函数 $w_1=\sin z$ 将区域 $\operatorname{Im} z>0$, $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} z<\frac{\pi}{2}$ 单叶地保形变换到上半平面 $\operatorname{Im} w_1>0$．因为

$$\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}+i\delta\right)=\pm\cos i\delta=\pm\frac{e^{-\delta}+e^{\delta}}{2},$$

所以它将$z=\pm\frac{\pi}{2}+i\delta$ 对应地变到点 $w=\pm A\triangleq\pm\frac{e^{-\delta}+e^{\delta}}{2}$.
这两个区域的边界的对应关系可参看图 7-28a. 函数

$$w_2=\frac{w_1}{A}$$

将上半平面 $\operatorname{Im} w_1>0$ 单叶地保形变换到上半平面 $\operatorname{Im} w_2>0$, 且将点 $w_1=\pm A$ 变到点 $w_2=\pm 1$, 其边界的对应关系可参看图 7-28b. 最后, 函数 $w=\operatorname{Arg}\sin w_2$ 的一个分支就把 $\operatorname{Im} w_2>0$ 单叶地保形变换到区域:

$$\operatorname{Im} w>0,\quad -\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} w<\frac{\pi}{2},$$

且使点 $w_2=\pm 1$ 变到点 $w=\pm\frac{\pi}{2}$, 其边界的对应关系可参看图 7-27. 因此, 这三个函数的复合就能满足要求:

$$w=\operatorname{Arg}\sin\left(\frac{2\sin z}{e^{-\delta}+e^{\delta}}\right).$$

习 题 7·4

1. 求下列区域单叶地保形变换到上半平面的函数:
   (1) 两个圆 $|z-i|<\sqrt{2}$, $|z+i|<\sqrt{2}$ 相交的且包有 $z=0$ 的区域;
   (2) 区域 $|z-1|>1$, $\left|z-\frac{3}{2}\right|<\frac{3}{2}$;
   (3) 区域 $|z-i|<2$, $\operatorname{Im} z>0$;
   (4) 区域 $\operatorname{Im} z>0$, $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} z<\frac{\pi}{2}$, 且要求把 z 平面上的三个点 $-\frac{\pi}{2}$、0、$\frac{\pi}{2}$ 对应地变到 w 平面上的三个点 $-\frac{\pi}{2}$、0、$\frac{\pi}{2}$.
2. 求把下列区域单叶地保形变换到下半平面的函数:
   (1) 全平面上除去虚轴上的线段$[-i, i]$后得到的区域;

(2) 圆外$|z|>1$除去实轴上的射线$[1, +\infty)$后得到的区域.

3. 求将下列区域D单叶地保形变换到区域G的函数:

(1) D: 带形区域$0<\operatorname{Im} z<\pi$中除去虚轴上的线段$\left[0, \frac{\pi}{2}i\right]$;

G: 带形区域$0<\operatorname{Im} w<\pi$.

(2) D: $|z|>1$, $0<\arg z<\alpha$; G: $0<\arg z<\alpha$, 且把点$z=h$变到点$w=1$; 把点$z=he^{i\alpha}$变到点$w=e^{i\alpha}$.

(3) D: 单位圆 $|z|<1$; G: 全平面上除去负实轴上的射线$\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$.

(4) D: 单位圆$|z|<1$内除去线段$(-1, 0]$及$[a, 1)$, $0<a<1$;

G: 上半平面的上半个垂直带形区域: $\operatorname{Im} w>0$, $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} w<\frac{\pi}{2}$.

第五节 利用对称原理及边界对应定理进行单叶保形变换

5.1 利用对称原理进行单叶保形变换

在第六章第一节中曾经介绍了用黎曼-施瓦兹定理来进行解析开拓. 这个定理可以推广到边界为圆周的一部份的情况, 且还可以用来研究在开拓后所得到的区域的变换特性. 这就有可能使得把研究比较复杂的区域的保形变换转化到比较简单的区域的变换, 这样就有可能具体求出变换的函数.

定理1(黎曼-施瓦兹定理的一般形式) 设D_1与D_2是z平面上的两个区域, D_1位于圆周C所围的区域的内部, 且D_1有一部分边界l位于圆周C上, D_2是D_1关于圆周C的对称区域; 同样设G_1与G_2是w平面上的两个区域, G_1位于圆周Γ所围的区域的内部, 且G_1有一部份边界L位于圆

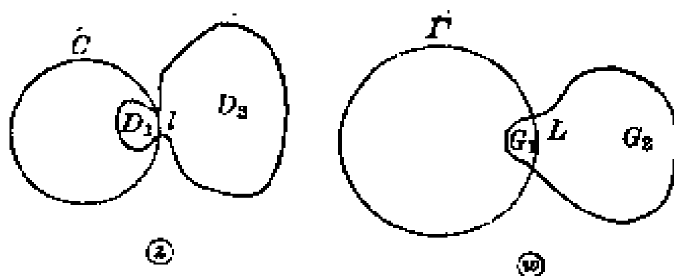


图 7-29

周 Γ 上，G_2 是 G_1 关于圆周 Γ 的对称区域(见图 7-29)．又设函数 $w=f(z)$ 在 D_1 内单叶解析，且把区域 D_1 变到区域 G_1；$w=f(z)$ 还在 D_1+l 上连续，且把 l 双方单值地变到 L．在这些条件下，存在函数 $w=F(z)$，它在区域 $D=D_1+l+D_2$ 上单叶解析，并把区域 D 双方单值地保形变换到区域

$$G=G_1+L+G_2,$$

并把 D 内关于圆周 C 的对称点变到 G 内关于圆周 Γ 的对称点．此外，当 $z\in D_1+l$ 时，有 $F(z)=f(z)$．

【证】 首先作分式线性函数 $\zeta=L_1(z)$，它把圆周 C 所围的内部区域变到上半平面 $\operatorname{Im}\zeta>0$，因而就把区域 D_1 单叶地保形变换到上半平面上的某个区域 D_1'，且把圆弧 l 变到实轴上的线段 l'．根据分式线性变换保持对称点不变的性质，函数 $\zeta=L_1(z)$ 还把区域 D_2 单叶地保形变换到区域 D_1' 关于实轴的对称区域 D_2'，它位于下半平面上．设 $z=L_1^{-1}(\zeta)$ 为其反函数．

同样，存在分式线性函数 $w_1=L_2(w)$，它把圆周 Γ 所围的内部区域变到上半平面 $\operatorname{Im}w_1>0$，因而把区域 G_1 单叶地保形变换到上半平面上的某个区域 G_1'，且把圆弧 L 变到实轴上的某个线段 L'．$w_1=L_2(w)$ 还把区域 G_2 单叶地保形变换到区域 G_1' 关于实轴的对称区域 G_2'，它也位于下半平面上．设 $w=L_2^{-1}(w_1)$ 是它的反函数．

这样一来，复合函数 $w_1=L_2[f[L_1^{-1}(\zeta)]]$ 就将区域 D_1' 单叶地保形变换到区域 G_1'，在 $D_1'+l'$ 上连续，且把实轴上的线段双方单值地变到实轴上的线段 L'.

根据第六章中的黎曼-施瓦兹对称定理，存在函数 $w_1=G(\zeta)$：

$$w_1=G(\zeta)=\begin{cases}L_2[f[L_1^{-1}(\zeta)]], & z\in D_1'+l';\\ \overline{L_2[f[L_1^{-1}(\zeta)]]}, & z\in D_2'+l'.\end{cases} \tag{1}$$

它在 $D_1'+l'+D_2'$ 上解析，且将 ζ 平面上关于实轴的对称点变到 w_1 平面上关于实轴的对称点．由于函数 $f(z)$ 及分式线性函数的双方单值的变换性质，函数 $w_1=G(\zeta)$ 将区域 D_1' 双方单值地保形变换到区域 G_1'，将线段 l' 双方单值地变到线段 L'，将区域 D_2' 双方单值地保形变换到区域 G_2'，因而就将区域 $D_1'+l'+D_2'$ 双方单值地保形变换到区域 $G_1'+L'+G_2'$.

现在考虑函数 $w=F(z)=L_2^{-1}[G(L_1(z))]$．由于 $L_1(z)$ 将区域 D_1+l+D_2 单叶地保形变换到区域 $D_1'+l'+D_2'$，$G(\zeta)$ 将区域 $D_1'+l'+D_2'$ 单叶地保形变换到区域 $G_1'+l'+G_2'$，$L_2^{-1}(w_1)$ 将区域 $G_1'+L'+G_2'$ 单叶地保形变换到区域 G_1+L+G_2．因此函数 $w=F(z)$ 就将区域 D_1+l+D_2 单叶地保形变换到区域 G_1+L+G_2．此外，当 $z\in D_1$ 时，由于公式(1)，$w=F(z)=L_2^{-1}[L_2[f[L_1^{-1}(L_1(z))]]]=f(z)$．∎

这个定理有多方面的应用，下面举例说明：

【例 1】 求把全平面上除去十字形后的区域 D 单叶保形变换到全平面上除去实轴上的线段后的区域 G（见图 7-30）.

解：在实轴上作两条虚线 $(-\infty,\ -a]$，$[b,\ +\infty)$．首先考虑将上半平面 $\text{Im}\,z>0$ 上去掉虚轴上的线段 $(0,\ ih]$ 后的区域 D_1 单叶保形变换到上半平面 $\text{Im}\,w>0$，且将 $z=-a$ 变到 $w=-c$，将 $z=b$ 变到 $w=d$ 的函数．由第四节例 2 知道，函

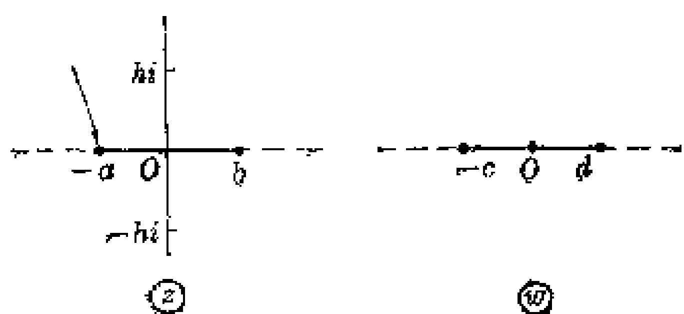


图 7-30

数 $w_1=\sqrt{z^2+h^2}$ 将区域 D_1 单叶保形变换到上半平面 $\operatorname{Im} w_1>0$. 此外，在研究边界点的变换时，今后总是认为区域内的点趋向于边界点的极限值，这样就容易看出：点 $z=-a$ 变到点

$$w_1=-\sqrt{a^2+h^2}.$$

事实上，在变换 $z_1=z^2$ 下，点 $z=-a$ 就变成点 $z_1=a^2$，但是它是由第四象限趋向于 $z_1=a^2$ 的极限值，即认为 $z_1=a^2$ 的幅角为 2π，因此 $z_2=z_1+h^2=z^2+h^2$ 就将 $z=-a$ 变到点 $z_2=a^2+h^2$，但是也将它看作第四象限上点的极限值，即认为 $z_2=a^2+h^2$ 的幅角也是 2π（见图 7-31a）.

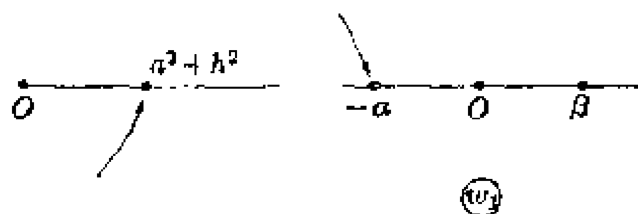


图 7-31a　　　　图 7-31b

最后，变换 $w_1=\sqrt{z_2}=\sqrt{z^2+h^2}$ 就将点 $z=-a$ 变到负实轴上的点 $-\sqrt{a^2+h^2}$，即其幅角为 π，实际上，它是第二象限上的点的极限值．同理可以看出：点 $z=b$ 在变换

$$w_1=\sqrt{z^2+h^2}$$

下变到点 $w=\sqrt{b^2+h^2}$，它是第一象限上的点的极限值．令

$\alpha=\sqrt{a^2+h^2}$，$\beta=\sqrt{b^2+h^2}$，同时也可以看出：这个变换还将边界$(-\infty,\ -a]$变到实轴上的射线$(-\infty,\ -\alpha]$，将边界$[b,\ +\infty)$变到实轴上的射线$[\beta,\ +\infty)$（见图 7-31b）.

现在寻找将上半平面 $\operatorname{Im} w_1>0$ 单叶保形变换到上半平面 $\operatorname{Im} w_2>0$，且使射线$(-\infty,\ -\alpha]$变到射线$(-\infty,\ -c]$，使射线$[\beta,\ +\infty)$变到射线$[d,\ +\infty)$的函数. 显然，函数

$$w_2=-c+\frac{d+c}{\alpha+\beta}(w_1+\alpha)$$

就能满足要求.

这样一来，这两个函数的复合函数

$$w_2=f(z)=-c+\frac{d+c}{\sqrt{a^2+h^2}+\sqrt{b^2+h^2}}\cdot\left(\sqrt{z^2+h^2}+\sqrt{a^2+h^2}\right)$$

就将区域 D_1 单叶地保形变换到上半平面 $\operatorname{Im} w_2>0$，且把$(-\infty,\ -a]$变到$(-\infty,\ -c]$，把$[b,\ +\infty)$变到$[d,\ +\infty)$.

利用定理 1，函数

$$w=G(z)=\begin{cases}f(z), & z\in D_1+(-\infty,\ -a]+[b,\ +\infty);\\ \overline{f(\bar{z})}, & z\in D_2.\end{cases}$$

就满足全部要求.

5.2 利用边界对应定理进行单叶保形变换

在很多情况下，为了要验证函数 $w=f(z)$ 把一个区域 D 单叶保形变换到另一个区域 G，往往只要验证它能否将 D 的边界双方单值地变换到区域 G 的边界即可. 这样，在具体应用时就会带来一定的方便.

定理 2（边界对应定理） 设区域 D 与 G 分别是以逐段光滑曲线 C 与 Γ 所围的有界区域. 又设函数 $w=f(z)$ 在 D

内解析，在 $D+C$ 上连续，且将边界 C 双方单值地变换到边界 Γ，则函数 $w=f(z)$ 必将区域 D 双方单值地保形变换到区域 G.

【证】 任取点 $w_0\in G$，首先证明：函数 $f(z)-w_0$ 在 D 内有且只有一个根.

根据第四章中的幅角原理，函数 $f(z)-w_0$ 在区域 D 内的根的数目 N 有表示式

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \operatorname{Arg}(f(z)-w_0),$$

其中 C 是 D 的边界，是按正方向绕行一圈的. 由此得到

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg}(w-w_0), \tag{2}$$

其中 Γ 是 G 的边界，但是暂时还不知道这里是按什么方向绕行的. 由等式(2)得到 $N=\pm1$. 但是 N 是表示函数 $f(z)-w_0$ 的零点的个数，因此 $N\neq-1$，所以 $N=1$. 这就证明了函数 $f(z)-w_0$ 在 D 内只有一个根，也即在 D 内只存在一个点，记作 z_0，使得 $w_0=f(z_0)$. 同时也可看出：当 C 按正方向绕行一圈时，Γ 也必按正方向绕行一圈.

当 $w_0\overline{\in}\overline{G}=G+\Gamma$ 时，由公式(2)即可看出 $N=0$，因此函数 $f(z)-w_0$ 在 D 内没有根，即当 $z\in D$ 时，函数 $w=f(z)$ 的值域不可能在 $\overline{G}$ 关于全平面的余集中.

当 $w_0\in\Gamma$ 时，在 D 内也没有点 z_0 使得函数 $f(z_0)$ 取的值为 w_0. 在相反的情况下，由于第一节中的解析函数将区域变到区域的定理知：它必将 z_0 的某一个邻域 $S(z_0)\in D$ 变到点 w_0 的一个邻域 $S'(w_0)$. 这个邻域就会包有区域 G 的外点，这就导致矛盾.

这样一来，函数 $w=f(z)$ 就双方单值地将区域 D 保形变

换到区域 G. ∎

注 1 在应用这个定理时，区域 D 的边界 C 经常是无界曲线，如正实轴等. 设 z_1 是闭区域 $\bar{D}=D+C$ 的一个外点，作变换 $\zeta=\frac{1}{z-z_1}$，则区域 D 就双方单值保形变换到某个有界区域，记作 D'，其边界 C 双方单值地变到 D' 的边界，记作 C'. 此时，考虑用函数 $w=f\left(z_1+\frac{1}{\zeta}\right)$ 代替函数 $f(z)$，它就在区域 D' 内解析，在 $D'+C'$ 上连续，且把 D' 的边界双方单值地变到区域 G 的边界 Γ. 应用上述定理 2 推出：函数 $f\left(z_1+\frac{1}{\zeta}\right)$ 就将区域 D' 双方单值保形变换到 G，因而函数 $f(z)$ 就将区域 D 双方单值保形变换到区域 G 了.

注 2 如果区域 G 的边界 Γ 包有无穷远点时，则情况就比较复杂了. 例如，函数 $w=z^3$ 在上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 上解析，在 $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ 上连续，且将实轴双方单值地变到 w 平面上的实轴，并保持方向不变. 但是，我们知道，$w=z^3$ 在上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 上不是单叶函数，它不能单叶地将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 变到上半平面 $\operatorname{Im} w>0$. 在这个情况下，定理 2 是不成立的. 对于这类区域 G，在对函数 $f(z)$ 及区域的边界作出一些假定后，定理 2 是否成立呢？下面的定理回答了这个问题.

定理 3 设 D 是以逐段光滑曲线 C 为边界所围的区域，而区域 G 的边界是包有无穷远点的逐段光滑曲线 Γ. 设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，在 $D+C$ 上除了点 $z=z_0$ 外连续，在 $z=z_0$ 处满足条件

$$\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^{\mu}=A\neq 0 \quad (\mu>0). \tag{3}$$

函数 $w=f(z)$ 还将边界 C 双方单值地变换到边界 Γ，$z=z_0$ 变

到 $w=\infty$，且保持绕行方向不变．最后，设曲线 C 在 $z=z_0$ 处的左右切线的夹角为 $\alpha\pi$ $(0<\alpha\leqslant 2)$，曲线 Γ 在 $w=\infty$ 处的两个分支渐近线所构成的角度为 $\beta\pi$ $(0\leqslant\beta\leqslant 2)$ （见图 7-32），若

$$\mu<\frac{\beta+2}{\alpha},\tag{4}$$

则函数 $w=f(z)$ 将区域 D 双方单值保形变换到区域 G．

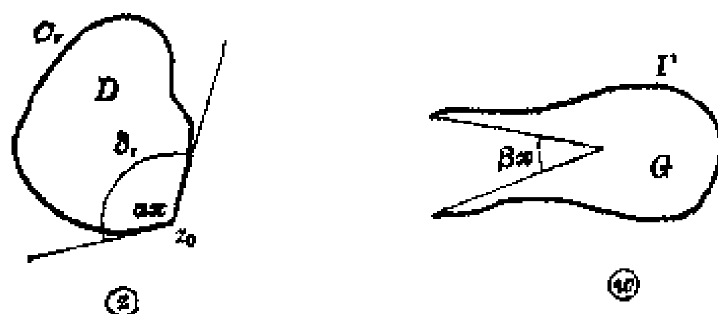


图 7-32

【证】 为了应用有界区域之间的边界对应定理，我们在 $z=z_0$ 处作以 $z=z_0$ 为圆心、半径为 r 的小圆 K_r，将圆 K_r 的边界上位于区域 D 内的那一部分记作 δ_r，将区域 $\widetilde{D}=D-\overline{K}_r$ （$\overline{K}_r$ 表示闭圆）的边界上属于曲线 C 的一部分记作 C_δ．令

$$\widetilde{C}=C_\delta+\delta_r.$$

设 w_0 是区域 G 内的任意一点．由于 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$，因此可以选择 r 充分小，使得在闭圆 $\overline{K}_r$ 与区域 D 相交的那一部分集合上，函数 $w=f(z)$ 不可能取到值 w_0．这样，函数 $f(z)-w_0$ 在区域 D 内的零点的个数 N 等于它在区域 $\widetilde{G}$ 内的零点的个数．根据第四章中的幅角原理知道

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\widetilde{C}}\operatorname{Arg}(f(z)-w_0)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{C_r}\operatorname{Arg}(f(z)-w_0)$$
$$+\frac{1}{2\pi}\Delta_{\delta_r}\operatorname{Arg}(f(z)-w_0),\tag{5}$$

当 z 在曲线 C 上按逆时针方向绕行一圈时，由定理的题设条件知道，点 $w=f(z)$ 在曲线 Γ 上也按逆时针方向绕行一圈．由此得到

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \operatorname{Arg}(f(z)-w_0)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg}(w-w_0)=(2-\beta)\pi. \tag{6}$$

设 z 在曲线 C_r 上按逆时针方向绕行时，$w=f(z)$ 在 Γ 上按逆时针方向对应着绕行一段弧 Γ_r．由于 $\lim\limits_{r\to 0}\Gamma_r=\Gamma$，因此，由等式(6)得到

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{C_r}\operatorname{Arg}(f(z)-w_0)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_r}\operatorname{Arg}(w-w_0)$$

$$=\frac{(2-\beta)\pi}{2\pi}+o(1)=\left(1-\frac{\beta}{2}\right)+o(1). \tag{7}$$

对于公式(5)中右边的第二项，由于条件(3)，得

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^\mu}(A+o(1)).$$

因此得到

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\delta_r}\operatorname{Arg}(f(z)-w_0)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\delta_r}\frac{A+o(1)-w_0(z-z_0)^\mu}{(z-z_0)^\mu}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\delta_r}\operatorname{Arg}(A+o(1)-w_0(z-z_0)^\mu)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\Delta_{\delta_r}\operatorname{Arg}(z-z_0)^\mu$$

$$=o(1)+\frac{1}{2\pi}\mu\alpha\pi=o(1)+\frac{\mu\alpha}{2}. \tag{8}$$

将等式(7)与(8)代入等式(5)后，令 $r\to 0$，就得到

$$N=1+\frac{\alpha\mu-\beta}{2}. \tag{9}$$

在条件(4)下，$\alpha\mu-\beta<2$，因此由等式(9)得到 $N<2$.此外，由于 $\mu>0$、$\alpha>0$、$\beta\leqslant 2$，因此就有

$$N=\frac{1}{2}(2-\beta+\alpha\mu)>0.$$

由此就得到了 $N=1$. 这就证明了：函数 $w=f(z)$ 在 D 内只存在一个值能够取到 $w_0\in G$.

余下来要证明，当 $w_0\overline{\in} G$ 时，函数 $f(z)-w_0$ 在区域 D 内没有根. 在这种情况下，上面的讨论仍然有效，但是代替等式(7)，这里有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\Delta_{C_r}\operatorname{Arg}(f(z)-w_0)\\
&\quad=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_r}\operatorname{Arg}(w-w_0)\\
&\quad=\frac{-\beta\pi}{2\pi}+o(1)=-\frac{\beta}{2}+o(1).
\end{aligned}\tag{10}$$

这样一来，比较等式(5)、(8)与(10)，令 $r\to 0$ 后，就得到

$$N=\frac{\alpha\mu-\beta}{2}.\tag{11}$$

同理，由于 $\alpha\mu>0$ 以及条件(3)知：$\alpha\mu-\beta<0$，就可以从等式(11)得到 $-1<N<1$. 由此推出 $N=0$，即函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内取不到值 $w_0\overline{\in} G$.

因而，函数 $w=f(z)$ 就双方单值地将区域 D 保形变换到 G. ▌

注 1 在具体应用时，若 Γ 在 $w=\infty$ 处是两条平行线，则 $\beta=0$；若 Γ 在 $w=\infty$ 处是全平面除去割线为射线的区域，则 $\beta=2$(见图 7-33).

注 2 若在 C 上有几个点 z_1、z_2、…、z_e 对应地变到 $w=\infty$，则可以像上面一样地讨论证明，只要其中至少有一个点



图 7-33

$z_i(1\leqslant i\leqslant s)$满足条件(3)与(4)，那么定理 3 的结论仍成立.

注 3 对于在本节定理 2 的注 2 中所举的函数 $w=z^3$ 及区域，在 $\mu=3$(z_0 对应于 $z=\infty$)、$\alpha=1$、$\beta=1$ 时，条件(3)不成立. 由此看出，一般地来说，条件(3)是定理 3 的必要条件.

【例 2】 问函数 $w=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ 把单位圆 $|z|<1$ 单叶地保形变换到什么区域?

解: 当 $|z|=1$ 时，令 $z=e^{i\theta}$，则

$$w=\frac{e^{i\theta}}{(1+e^{i\theta})^2}=\frac{1}{4\cos^2\dfrac{\theta}{2}}.$$

因而，当 θ 从 0 单调上升地变到 π 时，就有 $\operatorname{Im} w>0$，且 $\operatorname{Re} w$ 从 $\dfrac{1}{4}$ 单调上升地变到 $+\infty$；当 θ 从 π 单调上升地变到 2π 时，就有 $\operatorname{Im} w>0$，但 $\operatorname{Re} w$ 从 $+\infty$ 单调下降地变到 $\dfrac{1}{4}$. 这个函数在除了 $z=-1$ 以外的闭单位圆 $|z|\leqslant1$ 上连续，且把 $z=-1$ 变到 $w=\infty$. 为了应用边界对应定理，需要指出：在 $z=-1$ 处，$\alpha=1$、$\mu=2$，且 $\beta=2$，因此满足 $\mu<\dfrac{\beta+2}{\alpha}$. 应用定理 3 推出：这个函数就将单位圆 $|z|<1$ 双方单值地保形变换到全平面上除去实轴上的割线$\left[\dfrac{1}{4},\ +\infty\right)$后的区域.

习 题 7·5

1. 用对称原理求把区域 $|z|>1$ 上去掉两个线段 $1\leqslant|z|\leqslant h$, $\arg z=0, \pi$ 后的区域单叶地保形变换到 $|w|>1$ 的函数.
2. 求把 $|z|>1$ 上去掉四个线段 $1\leqslant|z|\leqslant h$, $\arg z=\frac{k\pi}{2}$ $(k=0,1,2,3)$ 的区域单叶地保形变换到 $|w|>1$ 的函数.
3. 求把上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 上去掉无穷多个线段 $0\leqslant y\leqslant h$, $x=k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 的区域单叶保形变换到上半平面 $\operatorname{Im} w>0$ 的函数.
4. 设函数 $w=f(z)$ 在区域 $r<|z|<R$ 内解析, 在 $r<|z|\leqslant R$ 上连续, 且当 $|z|=R$ 时, $f(z)=0$, 求证 $f(z)\equiv0$.
5. 试证: 若函数 $w=f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析, 在 $|z|\leqslant1$ 连续, 且将边界 $|z|=1$ 双方单值地变到 $|w|=1$, 则 $f(z)$ 必是分式线性函数.
6. 设函数 $w=f(z)$ 在 $r_1<|z|<r_2$ 内解析, 在 $r_1\leqslant|z|\leqslant r_2$ 上连续, 且双方单值地把 $r_1\leqslant|z|\leqslant r_2$ 变到 $\rho_1\leqslant|w|\leqslant\rho_2$, 则必有
$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{r_1}{r_2}.$$
7. 问函数 $w=\sqrt[n]{4}\dfrac{z}{(z^n+1)^{\frac{2}{n}}}$ (n 是正整数) 把区域 $|z|<1$ 单叶地保形变换到什么区域?
8. 问函数 $w=z+e^z$ 把带形区域 $-\pi<\operatorname{Im} z<\pi$ 单叶地保形变换到什么区域?

第六节 上半平面到多角形的保形变换

上半平面到多角形的保形变换在很多实际问题中, 如流体力学、电场、磁场等方面, 都有重要的应用. 设在 w 平面上有一个多角形区域 G, 其顶点按逆时针方向依次为 w_k $(1\leqslant k\leqslant n)$, 在顶点 $w=w_k$ 处多角形 G 的夹角为 $\alpha_k\pi$, 暂时认为

$0<\alpha_k\leqslant 2\ (1\leqslant k\leqslant n)$. 显然有

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=n-2. \tag{1}$$

我们需要求出能够将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 单叶地保形变换到多角形 G 的函数. 从下一节要介绍的黎曼存在定理可知道,这样的变换函数 $w=f(z)$ 是一定存在的, 且将实轴与多角形的边界 Γ 之间建立起一一对应的关系. 由此推出: 在实轴上必存在 n 个点 $a_k(1\leqslant k\leqslant n)$, 使得 $w_k=f(a_k)$ (见图 7-34). 不妨认为

$$a_1<a_2<\cdots<a_n. \tag{2}$$

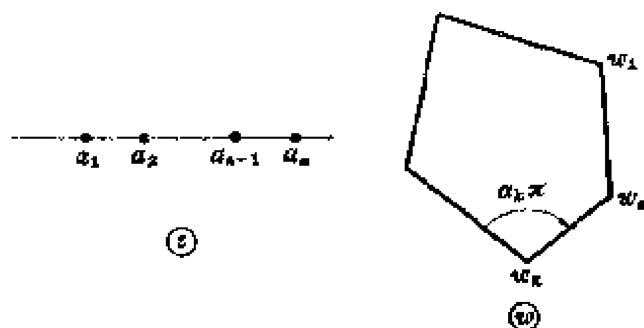


图 7-34

下面讨论变换函数 $w=f(z)$ 在点 $z=a_k$ 处的变换特性: 显然, 函数 $w_1=(f(z)-w_k)^{\frac{1}{\alpha_k}}$ 在适当选取分支后, 把 $z=a_k$ 在上半平面上的半个圆 S_k 双方单值地保形变换到在 w_1 平面上的 $w_1=0$ 的邻域中以某条直线 L_k 为边的一个区域 G_k. 根据对称原理知,函数 $w_1=(f(z)-w_k)^{\frac{1}{\alpha_k}}$ 把以 $z=a_k$ 为中心的一个小圆 C_k 双方单值地保形变换到 $w_1=0$ 的一个邻域 R_k.

根据第四章中解析函数的泰勒展开定理知道, 在 $z=a_k$ 的邻域 C_k 中, 有

$$\begin{aligned} w_1&=(f(z)-w_k)^{\frac{1}{\alpha_k}}\\ &=C_1^{(k)}(z-a_k)+C_2^{(k)}(z-a_k)^2+\cdots+C_n^{(k)}(z-a_k)^n+\cdots. \end{aligned} \tag{3}$$

由于这个函数在 $z=a_k$ 的邻域 C_k 中是单叶解析的，因此由本章第一节定理 2 知道：

$$C_1^{(k)}=\frac{dw_1}{dz}\Big|_{z=a_k}\neq 0.$$

由展开式(3)得到

$$f(z)=w_k+(z-a_k)^{\alpha_k}\{C_1^{(k)}+C_2^{(k)}(z-a_k)+\cdots\}^{\alpha_k}. \qquad (4)$$

由于花括弧中的 $C_1^{(k)}\neq 0$，因此 $\{\cdots\}^{\alpha_k}$ 可以取出一个单值解析分支，记作 $\varphi_k(z)$. 函数 $(z-a_k)^{\alpha_k}$ 也可以在半个圆 S_k 上取出一个单值解析分支. 因而有 $f(z)=w_k+\varphi_k(z)(z-a_k)^{\alpha_k}$，且当 $\alpha_k\neq 1$ 时，函数 $f(z)$ 以 $z=a_k$ 为支点.

此外，由于函数 $w=f(z)$ 将线段 $a_k a_{k+1}$ 双方单值地变到线段 $w_k w_{k+1}$ $(k=1, 2, \cdots, n; a_{n+1}=a_0;\ w_{n+1}=w_0)$，根据对称原理，函数 $w=f(z)$ 可以越过线段 $a_k a_{k+1}$ 开拓到整个下半平面. 这样，在下半平面上，对不同的线段 $a_k a_{k+1}$ 进行解析开拓后，可以得到不同的函数，记作 $w=f_k(z)$，$\operatorname{Im} z<0$. 现在证明：对于每一个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，有

$$f_k(z)-w_{k+1}=e^{2i\alpha_{k+1}\pi}\ (f_{k+1}(z)-w_{k+1}) \qquad (5)$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ a_{n+1}=a_1;\ w_{n+1}=w_1)$$

成立. 事实上，设 $\operatorname{Im} z<0$，则 $\operatorname{Im}\bar{z}>0$. 令 $f(\bar{z})=w$，则在多角形 G 内，根据对称原理，设 $f_k(z)=w^{(k)}$，它是 $w\in G$ 关于线段 $w_k w_{k+1}$ 的对称点. 由此看出：点 $\overline{w}^{(k)}$ 可以绕着点 $w=w_{k+1}$ 旋转角度 $2\alpha_{k+1}$ 后变到 $\overline{w}^{k+1}$（见图 7-35）. 这就证明了公式(5). 这个公式表明了，尽管函数 $w=f(z)$ 在通过不同的线段 $w_k w_{k+1}$ 开拓到下半平面后，可以得到不同的函数值

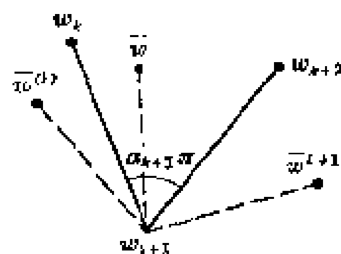


图　7-35

$f_k(z)$，但是相邻两个线段进行开拓后得到的函数值是有密切

联系的，是由公式(5)确定的.

现在通过公式(5)来构造一个下半平面上的单值解析函数. 首先，由公式(5)可以得到

$$f'_k(z)=e^{2i\alpha_{k+1}\pi}f'_{k+1}(z),\ f''_k(z)=e^{2i\alpha_{k+1}\pi}f''_k(z). \qquad (6)$$

由于函数 $f_k(z)$ 是 $\operatorname{Im} z<0$ 上的单叶解析函数，因此由第一节的定理 2 知道，$f'_k(z)\neq 0$，$\operatorname{Im} z<0$. 从而由(6)得到函数

$$\frac{f''_k(z)}{f'_k(z)}=\frac{f''_{k+1}(z)}{f'_{k+1}(z)} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (7)$$

在 $\operatorname{Im} z<0$ 上解析，且由于(7)知道，函数 $\dfrac{f''(z)}{f'(z)}$ 可以通过任何线段 $(a_k,\ a_{k+1})$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 单值地开拓到同一个解析函数，记作 $g(z)$.

为了求出函数 $g(z)$ 的明显表达式，我们首先指出：

$$z=a_k \quad (1\leqslant k\leqslant n)$$

是 $g(z)$ 的一级极点，$z=\infty$ 是 $g(z)$ 的可去奇点. 事实上，由于

$$f(z)=w_k+\varphi_k(z)(z-a_k)^{\alpha_k}, \qquad \varphi'_k(a_k)\neq 0,$$

因此

$$\begin{aligned}f'(z)&=\alpha_k(z-a_k)^{\alpha_k-1}\varphi_k(z)+(z-a_k)^{\alpha_k}\varphi'_k(z)\\&=(z-a_k)^{\alpha_k-1}\nu_k(z),\end{aligned} \qquad (8)$$

其中 $\nu_k(z)=\alpha_k\varphi_k(z)+(z-a_k)\varphi'_k(z)$ 在 $z=a_k$ 的邻域中解析，且 $\nu'_k(a_k)=\alpha_k\varphi'_k(a_k)\neq 0$. 因此

$$f''(z)=(\alpha_k-1)(z-a_k)^{\alpha_k-2}\nu_k(z)+(z-a_k)^{\nu_k-1}\nu'_k(z). \quad (9)$$

比较等式(8)与(9)，得到

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{\alpha_k-1}{z-a_k}+\frac{\nu'_k(z)}{\nu_k(z)}. \qquad (10)$$

因而函数 $g(z)=\dfrac{f''(z)}{f'(z)}$ 以 $z=a_k$ 为一级极点，且在 $z=a_k$ 处

的主要部分为 $\frac{\alpha_k-1}{z-a_k}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$。

现在研究函数 $g(z)$ 在 $z=\infty$ 处的性质：由于 $f_n(z)$ 是函数 $f(z)$ 经过线段 $a_n a_{n+1}$ $(a_{n+1}=a_1)$ 到下半平面的解析开拓，且函数 $f(z)$ 的函数值都在多角形 G 内，因此其解析开拓值 $f_n(z)$ 是有界的。这样一来，函数 $f(z)$ 在开拓以后就在 $z=\infty$ 的邻域中是有界的，因而根据第四章中的展开定理知道，它在 $z=\infty$ 的邻域中的罗朗展开式为

$$f(z)=A_0+\frac{A_m}{z^m}+\frac{A_{m+1}}{z^{m+1}}+\cdots,\quad A_m\neq 0.$$

由此得到

$$f'(z)=-\frac{mA_m}{z^{m+1}}-\frac{(m+1)A_{m+1}}{z^{m+2}}\cdots$$

$$=-\frac{mA_m}{z^{m+1}}\left(1+\frac{B_1}{z}+\frac{B_2}{z^2}+\cdots\right),$$

$$f''(z)=\frac{m(m+1)A_m}{z^{m+2}}\left(1+\frac{B_1}{z}+\frac{B_2}{z^2}+\cdots\right)$$

$$-\frac{mA_m}{z^{m+1}}\left(-\frac{B_1}{z^2}-\frac{2B_2}{z^3}-\cdots\right),$$

因而

$$g(z)=\frac{f''(z)}{f'(z)}=-\frac{m+1}{z}+\frac{-\frac{B_1}{z^2}-\frac{2B_2}{z^3}-\cdots}{1+\frac{B_1}{z}+\frac{B_2}{z^2}+\cdots}.$$

由此得到
$$\lim_{z\to\infty}g(z)=0,$$

即 $z=\infty$ 是函数 $g(z)$ 的可去奇点。

根据第四章第五节定理 6，从上面的结果即得到 $g(z)$ 是一个有理函数

$$g(z)=\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{\alpha_1-1}{z-a_1}+\frac{\alpha_2-1}{z-a_2}+\cdots+\frac{\alpha_n-1}{z-a_n}.$$

特别地，在上半平面上，两边积分后得到

$$\ln f'(z)=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\ln(z-a_k)+C_0,$$

即
$$f'(z)=C_1\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\alpha_k-1},$$

其中 C_0 与 $C_1=e^{C_0}$ 是任意常数. 再一次积分后就得到

$$f(z)=C_1\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\alpha_k-1}dz+C_2,\tag{11}$$

其中 C_2 是任意常数，z_0 是任意实数. 这个公式称为克里斯托弗-施瓦兹(Christoffel-Schwarz)公式.

总结上述讨论，得到下面的定理：

定理 1 设函数 $w=f(z)$ 将上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 单叶地保形变换到以 $w=w_k$ 为顶点、夹角为 $\alpha_k\pi$，$0<\alpha_k\leqslant 2(1\leqslant k\leqslant n)$ 的 n 角形 G 的内部，则在实轴上必存在点 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，使得对应地变到 w_1、w_2、…、w_n(按逆时针方向排列)，且函数 $w=f(z)$ 具有形式(11).

注 1 根据下一节要讲的黎曼存在定理知，这种变换函数 $f(z)$ 是存在的，因此函数 $f(z)$ 一定具有形式(11). 反之，也可以直接证明，由公式(11)给出的函数也一定将上半平面变到某个 n 角形，且若设顶点为 $w_k(1\leqslant k\leqslant n)$，则 $f(a_k)=w_k$，且在 w_k 处的夹角为 $\alpha_k\pi$，$0<\alpha_k\leqslant 2$ $(1\leqslant k\leqslant n)$. 这里就不证明了.

注 2 若具有顶点为 w_k、夹角为 $\alpha_k\pi$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 的多角形已给定了，那么要把上半平面单叶保形变换到这个 n 角形的函数时，由公式(11)知道，必须求出公式(11)中的点 a_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ 及 C_1 与 C_2. 但是这些量究竟应该如何根据数 w_k 及 $\alpha_k\pi$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 来求呢？这是一个比较困难的问题，对一些特殊形状的多角形，这些量是不难求出的；在一般的情况

下，只能用近似方法来求出这些量. 这里的主要困难是在于：从下一节的黎曼存在定理可知道：在 a_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ 中可以自由地任意选择三个，例如选 a_1、a_2、a_3，让它们对应地变到点 w_1、w_2、w_3. 但是 a_4、…、a_n 及 C_1、C_2 如何求呢？由公式(11)可看出：当 $x>a_n$ 时，$\operatorname{Arg}f'(x)=\operatorname{Arg}C_1$. 由于线段$(a_n,\ a_1)$在变换(11)下变到线段 w_nw_1，$f'(z)$的幅角是表示 z 处的旋转角，因此 $\operatorname{Arg}C_1$ 是表示线段 w_nw_1 与正实轴间的夹角，这是已知的. 如果在公式(11)中取 $z_0=a_1$，则在公式(11)中令 $z=a_1$ 后就得到 $f(a_1)=C_2$. 另一方面，已知 $f(a_1)=w_1$，因而 $C_2=w_1$，这也是已知的. 这样一来，就只剩下 $n-2$ 个实参数 a_3、a_4、…、a_n，$|C_1|$还需要确定，这可以通过 $n-2$ 个方程来求：

$$|w_k w_{k+1}|=|C_1|\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left|\prod_{i=1}^{n}(z-a_i)^{\alpha_i-1}\right||dz|$$

$$(k=3、4、\cdots、n;\ a_{n+1}=a_1). \tag{12}$$

显然，这是很不容易的，因此必须用近似计算的方法来解.

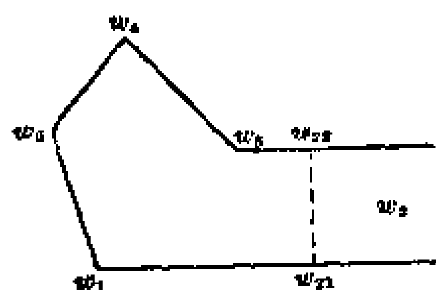


图 7-36

注 3 在很多实际问题中，多角形的夹角往往有等于零的，如图 7-36 中在 $w=w_2$ 处的夹角就为零，且这个多角形还是无界的. 此时，当 $z=a_2$ 时，积分(11)的值为 ∞，即 $z=a_2$ 变到 $w=\infty$，这是符合变换要求的. 在这种情况下可以证明：变换公式(11)是仍然成立的. 事实上，可以在 $w=w_2$ 的邻域中的两条边上任取点 w_{21} 及 w_{22}，把这两个点连起来，就得到一个 $n+1$ 边形(见图 7-36). 把 $w=w_{21}$ 处的夹角记作 $\alpha_{21}\pi$；$w=w_{22}$ 处的夹角记作 $\alpha_{22}\pi$，故 $\alpha_{21}+\alpha_{22}=1$. 下面讨论将上半平面变到这个 $n+1$ 边形的函数：设 w_{21} 与 w_{22} 是

由 z 平面的实轴上的点 a_{21} 与 a_{22} 变来的. 利用上半平面变到这个 $n+1$ 边形的公式(11), 得到

$$w=C_1\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_{21})^{\alpha_{21}-1}(z-a_{22})^{\alpha_{22}-1}$$

$$\cdot(z-a_3)^{\alpha_3-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}dz+C_2. \qquad (13)$$

当 $a_{21}\to a_2$, $a_{22}\to a_2$ 时, 显然有 $w_{21}\to w_2$, $w_{22}\to w_2$, 因此变换(13)就转化为

$$w=C_1\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_{21}-1}(z-a_2)^{\alpha_{22}-1}$$

$$\cdot(z-a_3)^{\alpha_3-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}dz+C_2$$

$$=C_1\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{-1}(z-a_3)^{\alpha_3-1}\cdots$$

$$\cdot(z-a_n)^{\alpha_n-1}dz+C_2.$$

这就是我们需要的变换, 也是在公式(11)中令 $\alpha_2=0$ 的结果.

如果多角形上有几个顶点处的夹角为零, 则用同样的方法可以证明公式(11)仍然成立.

注 4 如果取 $a_n=\infty$, 也即认为多角形的顶点 w_n 是由 $z=\infty$ 变来的, 则公式(11)还可以化简. 为了将这种情况转化到曾经研究过的情况, 我们作一个变换

$$\zeta=-\frac{1}{z-b}, \quad b<a_1.$$

这个变换将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 变到上半平面 $\operatorname{Im}\zeta>0$, 将点 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 依次地变到点 β_1、β_2、$\cdots$、β_{n-1}、$\beta_n=0$. 由公式(11)知道, 将上半平面 $\operatorname{Im}\zeta>0$ 单叶地保形变换到 n 角形 G 且把 β_k 变到 $w_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的变换公式为

$$w=F(\zeta)=C_1\int_{\zeta_0}^{\zeta}(z-\beta_1)^{\alpha_1-1}\cdots(z-\beta_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1}\zeta^{\alpha_n-1}d\zeta+C_2.$$

因此, 函数 $w=F(z)=f\left(-\frac{1}{\zeta}+b\right)$将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 单叶

地保形变换到 n 角形 G，且把点 $z=a_k$ 对应地变到 w_k $(1\leqslant k\leqslant n)$．它具有表示式

$$w=f(z)=C_1\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{z-b}+\frac{1}{a_k-b}\right)^{\alpha_k-1}$$

$$\cdot\left(\frac{-1}{z-b}\right)^{\alpha_n-1}\frac{1}{(z-b)^2}dz+C_2$$

$$=C_1\int_{z_0}^{z}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^{\alpha_k-1}(z-a_k)^{\alpha_k-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_k-b)^{\alpha_k-1}\prod\limits_{k=1}^{n}(z-b)^{\alpha_k-1}(z-b)^2}dz+C_2$$

$$=C_1'\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n-1}(z-a_k)^{\alpha_k-1}dz+C_2, \tag{14}$$

其中 $C_1'=\dfrac{C_1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b-a_k)^{\alpha_k-1}}$，这里用到等式(1)．

这样一来，从公式(14)可看出，若取 $a_n=\infty$，则在克里斯托弗-施瓦兹公式(11)中就可以少一个因子 $(z-a_n)^{\alpha_n-1}$，从而得到简化．

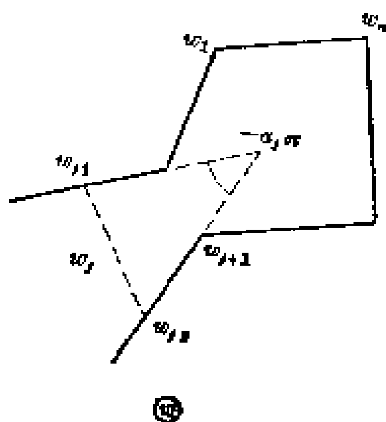


图 7-37

注 5 若多边形 G 有一个或几个顶点在 $w=\infty$ 处，设 $w=w_j=\infty$（见图 7-37），且在 $w=w_j=\infty$ 处的夹角不为零，那么就可以像在注 3 中一样，在顶点为 $w=w_j=\infty$ 的两个边上取点 w_{j1} 及 w_{j2}，作连线 $w_{j1}w_{j2}$ 构成一个 $n+1$ 边形．设在 $w=w_{j1}$ 处的夹角为 $\alpha_{j1}\pi$，在 $w=w_{j2}$ 处的夹角为 $\alpha_{j2}\pi$（见图 7-37），则将上半平面 $\operatorname{Im}z>0$ 单叶地保形变换到这个 $n+1$ 边形，且将 a_k 变到 w_k $(1\leqslant k\leqslant n,\ k\neq j)$，$a_{j1}$ 变到 w_{j1}，a_{j2} 变到 w_{j2} 的函数为

$$w=C_1\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{j-1}(z-a_k)^{\alpha_k-1}(z-a_{j1})^{\alpha_{j1}-1}(z-a_{j2})^{\alpha_{j2}-1}$$

$$\cdot\prod_{k=j+1}^{n}(z-a_k)^{\alpha_k-1}dz+C_2. \tag{15}$$

在公式(15)中，令 w_{j1} 与 w_{j2} 平行地趋向于 ∞，则 $a_{j1}\to a_j$，$a_{j2}\to a_j$，就得到

$$w=C_1\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{j-1}(z-a_k)^{\alpha_k-1}(z-a_k)^{\alpha_{j1}+\alpha_{j2}-2}$$

$$\cdot\prod_{k=j+1}^{n}(z-a_k)^{\alpha_k-1}dz+C_2. \tag{16}$$

如果规定多角形 G 在 $w=w_j$ 处的夹角等于边 w_jw_{j+1} 与 w_jw_{j-1} 的延长线所交的角度乘上(-1)倍（见图 7-37），则由于

$$-\alpha_j\pi+\alpha_{j1}\pi+\alpha_{j2}\pi=\pi,$$

即 $-\alpha_j+\alpha_{j1}+\alpha_{j2}=1$，因此由公式(16)同样可以得到公式(11)。

当多角形 G 有几个顶点在 $w=\infty$ 处，公式(11)也成立，这只要将 $w=\infty$ 处的夹角按上面的规定来理解即可。

【例 1】 设 G 是一个三角形，其顶点为 w_1、w_2、w_3，与顶点对应的夹角为 $\alpha_1\pi$、$\alpha_2\pi$、$\alpha_3\pi$，求将上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 单叶地保形变换到区域 G 的函数。

解：在实轴上取三个点 0、1、∞，则由公式(11)及注 4 可知，函数

$$\zeta=\int_0^z z^{\alpha_1-1}(1-z)^{\alpha_2-1}dz$$

将 $\mathrm{Im}\,z>0$ 变成一个三角形 G'，其顶点记作 ζ_1、ζ_2、ζ_3，在顶点处的夹角对应地为 $\alpha_1\pi$、$\alpha_2\pi$、$\alpha_3\pi=(1-\alpha_1-\alpha_2)\pi$。经过平移、旋转及相似变换，可以将区域 G' 单叶保形变换到区域 G，即存在常数 c_1 与 c_2，使函数

$$w=c_1\zeta+c_2=c_1\int_0^z z^{\alpha_1-1}(1-z)^{\alpha_2-1}dz+c_2$$

满足这里的要求.

【例 2】 求把上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 单叶地保形变换到四边形 $-K$、K、$K+iK'$ 及 $-K+iK'$ 的函数，其中 $K>0$，$K'>0$(见图 7-38).

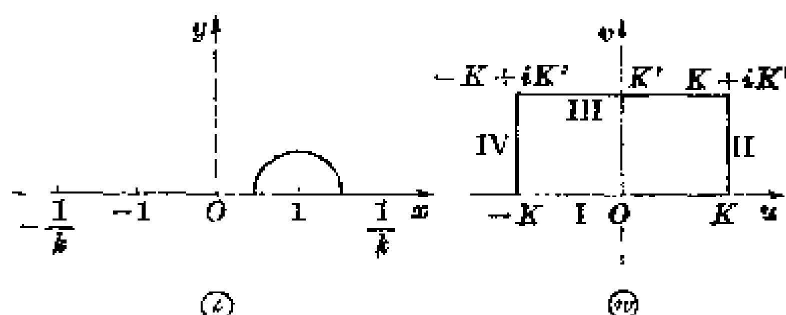


图 7-38

解: 由下一节的黎曼存在定理可知道，将 z 平面上的第一象限单叶保形变换到矩形 0、K、$K+iK'$、K'(见图 7-38)，且把 $z=0$ 变到 $w=0$，把 $z=1$ 变到 $w=K$，把 $z=\infty$ 变到 $w=K'$ 的函数是存在的. 这个函数 $w=f(z)$ 将 z 平面上的线段 $[0, 1]$ 变到 w 平面上的线段 $[0, K]$，把射线 $[1, +\infty)$ 变到线段 $[K+i0, K+iK']$ 及 $[K+iK', K']$，把虚轴变到虚轴上的线段 $[0, iK']$. 因此它必将实轴上的一点

$$z=\frac{1}{k} \quad (0<k<1)$$

变到点 $w=K+iK'$，且根据对称原理，它必把上半平面变到由矩形 $0K(K+iK')K'$ 经过虚轴对称开拓后得到的矩形 $(-K)K(K+iK')(-K+iK')$，同时也必将点 $z=-\frac{1}{k}$ 变到点 $-K+iK'$. 这样一来，函数 $f(z)$ 经过对称开拓后，就将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 变到矩形 $(-K)$ K $(K+iK')$ $(-K+$

iK')，且将 z 平面上的点 $-\frac{1}{k}$、-1、1、$-\frac{1}{k}$ 对应地变到 w 平面上的点 $-K+iK'$、$-K$、K、$K+iK'$. 应用克里斯托弗-施瓦兹公式(11)，由于 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\frac{1}{2}$，从而得到

$$w=C_1\int_0^z\left(z+\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}-1}(z+1)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$\cdot(z-1)^{\frac{1}{2}-1}\left(z-\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}-1}dz+C_2$$

$$=C_1'\int_0^z\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}dz+C_2\quad(0<k<1).\tag{17}$$

其中 C_1' 为常数，且由于 $z=0$ 变到 $w=0$，因此 $C_2=0$. 这里的根式函数规定当 $z\in(0,\ 1)$时取正值.

为了确定数 C_1' 及 k，利用 $z=1$ 变到 $w=K$，得到

$$K=C_1'\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}dz.\tag{18}$$

由于(18)中的积分为正数，因此 $C_1'>0$. 因为 $z=\frac{1}{k}$ 变到 $K+iK'$，所以由(17)得到

$$K+iK'=C_1'\int_0^{\frac{1}{k}}\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}dz.\tag{19}$$

当 z 在实轴上从小于 1 的值变到大于 1 的值时，应该看作 z 在上半平面上绕着以 $z=1$ 为圆心的上半个圆周从 z 小于 1 的值变到大于 1 的值（见图 7-38）. 此时，$\arg(1-z)$ 从 0 变到 $-\pi$，而其他的幅角 $\arg(1+z)$、$\arg(1-kz)$ 与 $\arg(1+kz)$都保持不变，因此从等式(19)可以得到

$$K+iK'=C_1'\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}dz$$

$$+iC_1'\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{1}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}dz.$$

由此利用(18)，由上式可以得到

$$K'=C_1'\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{1}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}dz. \tag{20}$$

若作变换 $z=\frac{1}{\sqrt{1-k'^2\tau^2}}$，$k'^2=1-k^2\ (0<k'<1)$，由(20)得到

$$K'=C_1'\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{1-k'^2\tau^2}-1\right)\left(1-k^2\frac{1}{1-k'^2\tau^2}\right)}}$$

$$\cdot\frac{k'^2\tau d\tau}{(1-k'^2\tau^2)^{\frac{1}{2}}}=C_1'\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}}d\tau. \tag{21}$$

因而，从公式(18)及(21)得到

$$\frac{K'}{2K}=\frac{\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}}{2\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}}. \tag{22}$$

当 k 从 0 单调上升变到 1 时，公式(22)的分母从

$$2\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\pi$$

连续地单调上升到 $+\infty$，此时，由于 $k'^2=1-k^2$ 单调地从 1 到 0，所以分子从 $+\infty$ 连续地单调下降到

$$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{2}.$$

这样一来，当 k 从 0 单调上升地变到 1 时，公式(22)的右边连续单调地从 $+\infty$ 下降到 0. 因而，根据连续函数的性质，存在唯一的 $k(0<k<1)$，使得公式(22)的右边确实可以取到值 $\frac{K'}{2K}$. 当然，在求具体的 k 时，还需要用到近似计算方法. 在求出 k 后，由(18)就可以求出 C_1'.

我们也可以直接验证函数

$$w=\int_0^z \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}dz \quad (0<k<1). \tag{23}$$

将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 单叶地保形变换到矩形 $(-K)K(K+iK')(-K+iK')$，其中

$$K=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$K'=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} \quad (k'^2=1-k^2).$$

有兴趣的读者自己可以证明.

下面再证明：由(23)所确定的函数的反函数

$$z=\operatorname{sn}(w,\ k)$$

可以从矩形 $(-K)K(K+iK')(-K+iK')$ 解析开拓为全平面上的亚纯函数.

根据变换的特性，函数 $z=\operatorname{sn}(w,k)$ 把线段 $(-K,\ K)$ 变到线段 $(-1,\ 1)$，把线段 $(K,\ K+iK')$ 变到线段 $\left(1,\ \frac{1}{k}\right)$，把线段 $(K+iK',\ 0+iK')$ 及 $(0+iK',\ -K+iK')$ 分别变到线段 $\left(\frac{1}{k},\ +\infty\right)$ 及 $\left(-\infty,\ -\frac{1}{k}\right)$，把线段 $(-K+iK',\ -K)$ 变到线段 $\left(-\frac{1}{k},\ -1\right)$. 把矩形 $(-K)K(K+iK')(-K+$

iK') 的四条边分别记作 I、II、III、IV (见图 7-38). 从上面的边界对应以及根据对称原理知道：函数 $z=\text{sn}(w, k)$ 可以越过这四条边的任一条进行解析开拓，其值取在下半平面上. 若在一次进行解析开拓后，再沿这个方向进行开拓，则根据对称原理，其值又取在上半平面，经过两次开拓以后的值相等. 因此就有

$$z(w+4Kl+2K'mi, k)=z(w, k),$$

其中 l 与 m 为任意整数，即它是双周期函数，其周期为 $2K$ 及 $K'i$. 将取值在上半平面上的区域用阴影表示(见图 7-39)，其他部分取值在下半平面.

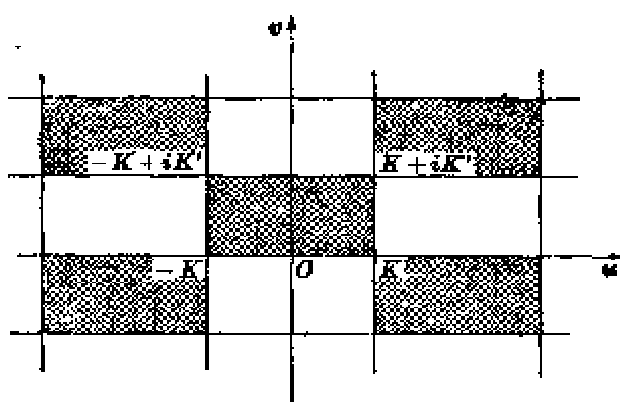


图 7-39

容易看出：函数 $z=\text{sn}(w, k)$ 除了 $z=K'i$ 以及所有开拓后的点 $K'i+2K'mi+4Kl$ 以外，在全平面上解析，且在 $z=Ki+2K'mi+4Kl$ 上 $z=\infty$. 由于函数在这些点的邻域中是实现双方单值变换的，考虑函数 $\dfrac{1}{\text{sn}(w, k)}$，它在这些点的邻域中也实现双方单值变换. 由于函数 $\dfrac{1}{\text{sn}(w, k)}$ 在 $z=Ki+2K'mi+4Kl$ 上取值为零，因此根据第一节中的定理 2，函数 $\dfrac{1}{\text{sn}(w, k)}$ 以

$$z=Ki+2K'ml+4Kl$$

为一级零点. 因而根据第四章中零点与极点的关系知道，函数 $z=\text{sn}(w, k)$ 以 $z=K'i+2K'mi+4Kl$ 为一级极点，其中 m 与 l 为任意整数. 这样一来，函数 $z=\text{sn}(w, k)$ 就是全平面上的亚纯函数，称为雅可比(Jacobi)椭圆函数.

【例 3】 求将上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 单叶地保形变换到图 7-40 的区域的函数.

解：图 8-40 是一个四角形，其顶点为 A_1、A_2、A_3、A_4，对应的夹角为 $\alpha_1\pi=\alpha_2\pi=\alpha_3\pi=0$，$\alpha_4\pi=2\pi$. 在实轴上，取 $a_1=1$、$a_2=\infty$、$a_4=0$，则由克里斯托弗-施瓦兹公式 (11) 得到

$$w=C_1\int_0^z\frac{z}{(z-1)(z+a)}\,dz=C_1\left\{\ln(1-z)+a\ln\left(1+\frac{z}{a}\right)\right\},\tag{24}$$

其中设 $z=-a(a>0)$ 变到点 A_3，且在对数函数中规定：当 $z=x(0<x<1)$ 时，$\arg(1-z)=0$，$\arg\left(1+\frac{z}{a}\right)=0$. 由于线段 $(0,1)$ 变到 $(-\infty,0)$，所以 C_1 是实数.

为了确定参数 C_1 与 a，当 $z=x<1$ 绕着以 $z=1$ 为中心、半径为 r 的上半个小圆周变到 $z=x>1$ 时，幅角 $\arg(1-z)$ 由 0 变到 $-\pi$，幅角 $\arg\left(1+\frac{z}{a}\right)$ 没有变化，$|1-z|$ 也没有变化，而 $\left|1+\frac{z}{a}\right|$ 变化很小. 因而，由 (24) 得到

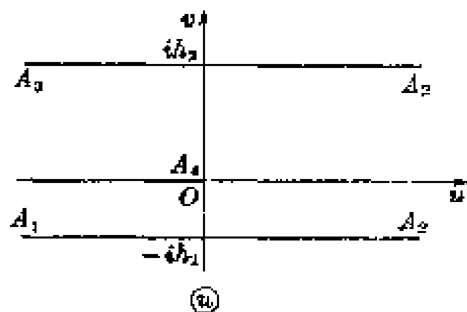


图 7-40

$$\Delta w=-C_1 i\pi+o(1).\tag{25}$$

此时，对应的 w 就从射线 A_4A_1 上变到射线 A_1A_2 上，Δw 的虚部为 $-ih_1$. 这样，在 (25) 中两边取虚部后，就得到

$$-h_1=-C_1\pi+o(1),\quad 即\quad C_1=\frac{h_1}{\pi}.\tag{26}$$

同理，当 $z=x<-a$ 绕着以 $z=-a$ 为中心、半径为 r 的上半

个小圆周变到 $z=x>-a$ 时，幅角 $\arg(1-z)$ 没有变化，$\arg\left(1+\frac{z}{a}\right)$ 由 π 变到 0，$|1-z|$ 变化很小，$\left|1+\frac{z}{a}\right|$ 没有变化．因而，由(24)得到

$$\Delta w=-aC_1 i\pi+o(1). \tag{27}$$

此时，对应的 w 就从射线 A_2A_3 变到 A_3A_4，Δw 的虚部为 $-ih_2$．这样，在(27)中两边取虚部后，就得到

$$-h_2=-aC_1\pi.$$

将(26)式代入上式，则得到

$$a=\frac{h_2}{h_1}. \tag{28}$$

最后，将等式(26)与(28)代入(24)后，就得到变换函数

$$w=\frac{h_1}{\pi}\left\{\ln(1-z)+\frac{h_2}{\pi}\ln\left(1+\frac{h_1}{h_2}z\right)\right\}.$$

习 题 7·6

1．求将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 单叶保形变换到边长为 2 的等边三角形的函数(设三个顶点为 -1、1、$\sqrt{3}i$)．

2．求将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 单叶保形变换到：(1) 图 7-41、(2) 图 7-42 的函数．

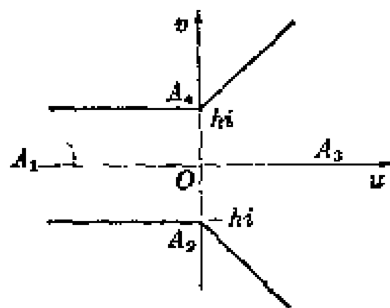


图 7-41

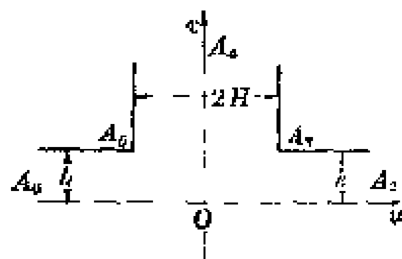


图 7-42

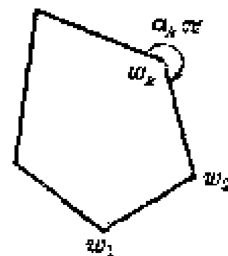


图 7-43

3．求将上半平面 $\operatorname{Im}>0$ 单叶保形变换到 n 角形外部的区域的函数，其中设这个 n 角形的外角为 $\alpha_k\pi(1\leqslant k\leqslant n)$(见图 7-43)．

第七节　黎曼存在及唯一性定理

在前面几节中讨论了各种特殊形状的区域之间的双方单值保形变换的问题. 现在自然要提出下面的一般问题:

1. 任给两个区域 D 与 G (为方便起见,我们可以认为区域 G 就是 $|w|<1$), 是否存在 D 内的单叶解析函数 $w=f(z)$ 把区域 D 变到 $|w|<1$?

2. 如果这种变换函数存在的话,那么它是否唯一?

对于第一个问题, 回答是否定的. 事实上, 设 D 是一个二连通区域, 即其边界是由两条互不相交的闭曲线 C_1 及 C_2 所组成的(见图 7-44), 则可以在 D 内构造一个逐段光滑闭曲线 C, 它的内部包有曲线

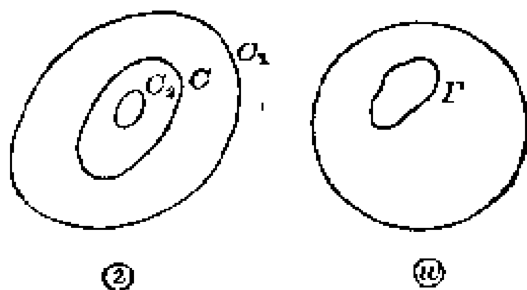


图　7-44

C_2. 若函数 $w=f(z)$在 D 内单叶解析, 且把 D 双方单值地保形变换到$|w|<1$, 则曲线 C 就变到 $|w|<1$ 内的闭曲线, 记作 Γ. 函数 $w=f(z)$的反函数 $z=\varphi(w)$ 在 $|w|<1$ 内单叶解析, 且把曲线 Γ 双方单值地变到曲线 C. 因此, 根据第五节中的边界对应定理, 函数 $z=\varphi(w)$就将 Γ 所围的区域内部双方单值地保形变换到由曲线 C 所围的区域内部. 这是不可能的, 因为 C 的内部包有 C_2, 而 C_2 的内部包有不属于区域 D 中的点. 由此看出: 对于连通数目不同的区域, 不可能存在双方单值保形变换, 使得将一个区域变到另一个区域.

如果两个区域的连通数目是相同的, 也不一定能够实现这两个区域间的双方单值保形变换. 事实上, 从习题 7·5

第 6 题可知：如果两个圆环的半径之比不相等，则就不能实现这两个圆环之间的双方单值保形变换. 可以考虑一些最简单的"标准区域"，并且研究在什么情况下，任意一个区域可以双方单值保形变换到这些"标准区域". 但这些内容已超出本书的范围了.

现在讨论扩充平面上的单连通区域 D 的情况：这里要求对于区域内的任意一条闭曲线的内部区域或外部区域中至少有一个完全属于区域 D. 就是在这种情况下，第一个问题也是不一定总能够得到肯定解答的. 例如：

(一) 若区域 D 没有边界点，即区域 D 是扩充了的全平面. 如果存在函数 $w=f(z)$，它将区域 D 变到单位圆 $|w|<1$ 的内部，即 $|w|=|f(z)|<1$，则根据第四章中的刘维尔定理，必有 $f(z)\equiv$常数. 但是，这种函数是不可能实现将扩充平面双方单值地保形变换到 $|w|<1$ 的. 因此就出了矛盾.

(二) 若区域 D 只有一个边界点. 如果存在函数

$$w=f(z),$$

它将区域 D 双方单值地保形变换到 $|w|<1$，则同样地也会导致矛盾. 事实上，设这个边界点 $z_0\neq\infty$，则变换 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$ 将区域 D 双方单值地保形变换到全平面上除去 $\zeta=\infty$ 的区域 D'. 这样一来，函数 $w=f\left(z_0+\dfrac{1}{\zeta}\right)$就将区域 D' 双方单值地保形变换到 $|w|<1$. 由此，如在上面(一)中的讨论一样，应用刘维尔定理就得到 $f\left(z_0+\dfrac{1}{\zeta}\right)\equiv$常数，即 $f(z)\equiv$常数. 显然，这样的函数只可能将区域 D 变到一个点，不可能双方单值地变到 $|w|<1$. 这又导致矛盾.

最后，需要指出：除了上述两种情况外，即：当单连通区

域 D 在扩充平面上至少有两个边界点时，这样的单叶保形变换确实是存在的．这就是著名的黎曼（Riemann）存在定理．此外，从第二节中的对几个简单区域的变换中启示我们：在规定了一个区域变到另外一个区域后，还存在三个实参数可供自由选择．例如要求将单位圆 $|z|<1$ 双方单值地保形变换到单位圆 $|w|<1$，从第二节中的变换公式(23)即

$$w=f(z)=e^{i\theta_0}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\quad(|\alpha|<1)$$

可看出：若指定 α，使得 $f(\alpha)=0$，$\arg f'(\alpha)=\varphi_0$，其中 φ_0 也是给定的数，这样的变换才是唯一的．因此也可以设想：在一般情况下，符合这两个条件的变换函数也是唯一的．从而有下面的定理：

定理 1（黎曼存在及唯一性定理） 设扩充平面上的单连通区域 D 的边界上至少含有两个点时，则一定存在一个在 D 内的单叶解析函数 $w=f(z)$，它将区域 D 双方单值保形变换到 $|w|<1$，且在条件

$$f(\alpha)=0,\quad z\in D,\quad \arg f'(\alpha)=\varphi_0 \tag{1}$$

下，这样的变换函数 $f(z)$ 是唯一的（其中 $\alpha\in D$ 是任意复数，φ_0 是任意实数）．

这个定理的存在性这里就不证了，只证明它的唯一性．先证明一个引理，它本身也有独立的意义．

引理（施瓦兹） 设函数 $w=\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且满足

$$\varphi(0)=0,\quad |\varphi(z)|<1\quad(|z|<1), \tag{2}$$

则它一定满足不等式

$$|\varphi'(0)|\leqslant 1,\ |\varphi(z)|\leqslant|z|\quad(|z|<1). \tag{3}$$

若(3)中第一式中的等号成立或者第二式中的等号对某个

$z \neq 0$, $|z|<1$ 也成立时，则必有

$$\varphi(z) \equiv e^{i\theta_0} z \quad (\theta_0 \text{ 是实数}). \tag{4}$$

【证】 根据第四章第二节中的定理 1，由于(2)中第一个等式，函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式为

$$\varphi(z)=c_1 z+c_2 z^2+\cdots+c_n z^n+\cdots \quad (|z|<1).$$

因而，函数

$$g(z)=\frac{\varphi(z)}{z}=c_1+c_2 z+\cdots+c_n z^{n-1}+\cdots \quad (|z|<1) \tag{5}$$

以 $z=0$ 为可去奇点，即 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且由(5)得到

$$\lim_{z\to 0} g(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\varphi(z)}{z}=c_1=\varphi'(0). \tag{6}$$

此外，对于任意点 z'，$|z'|<1$，一定可以找到圆 $|z|<R<1$，使 $|z'|<R$. 由此，利用条件(2)中的第二个式子即

$$|\varphi(z)|<1 \quad (|z|<1)$$

及第四章中的最大模原理，得到

$$|g(z')|=\left|\frac{\varphi(z')}{z'}\right|\leqslant \max_{|z|\leqslant R}\left|\frac{\varphi(z)}{z}\right|$$

$$=\max_{|z|=R}\frac{|\varphi(z)|}{|z|}\leqslant\frac{1}{R}.$$

在上式中，令 $R\to 1$，就得到

$$|g(z')|\leqslant 1 \quad (|z'|<1), \tag{7}$$

即

$$|\varphi(z)|\leqslant |z|. \tag{8}$$

从(7)，利用(6)，就得

$$|\varphi'(0)|\leqslant 1. \tag{9}$$

这就证明了不等式(3).

若 $|\varphi'(0)|=1$，有 $|g(0)|=1$. 由不等式(7)，应用第四章中的最大模原理，得到 $|g(z)|=1$，$|z|<1$. 因此 $g(z)\equiv$常数，即存在实数 θ_0，使 $g(z)\equiv e^{i\theta_0}$，从而得 $\varphi(z)\equiv e^{i\theta_0} z$.

若$z''\neq 0$使$|\varphi(z'')|=|z''|$，即$|g(z'')|=1$. 同样，由不等式(7)，应用最大模原理，就可以得到$|g(z)|\equiv 1$，$|z|<1$，因此也可以得到$\varphi(z)\equiv e^{i\theta_0}z$. 引理证毕. ■

下面证明定理1的唯一性：设有两个单叶解析函数

$$w=f_1(z) \quad 与 \quad w=f_2(z),$$

它们都将区域D双方单值地保形变换到单位圆$|w|<1$，且满足条件

$$f_1(\alpha)=0, \quad \arg f_1'(\alpha)=\varphi_0; \tag{10}$$

$$f_2(\alpha)=0, \quad \arg f_2'(\alpha)=\varphi_0. \tag{11}$$

设$z=f_1^{-1}(w)$是函数$w=f_1(z)$的反函数；$z=f_2^{-1}(w)$是$w=f_2(z)$的反函数. 显然，函数$\zeta=f_2[f_1^{-1}(w)]$在$|w|<1$内单叶解析，且将$|w|<1$双方单值地保形变换到$|\zeta|<1$，由(10)及(11)即得

$$f_2[f_1^{-1}(0)]=f_2(\alpha)=0. \tag{12}$$

由此，对函数$\zeta=f_2[f_1^{-1}(w)]$，$|w|<1$应用施瓦兹引理后就得到

$$|f_2[f_1^{-1}(w)]|\leqslant|w|, \quad |w|<1,$$

即

$$|f_2(z)|\leqslant|f_1(z)|, \quad z\in D. \tag{13}$$

与上述同理，对函数$\zeta=f_1[f_2^{-1}(w)]$应用施瓦兹引理后就得到

$$|f_1[f_2^{-1}(w)]|\leqslant|w|, \quad |w|<1,$$

即

$$|f_1(z)|\leqslant|f_2(z)|, \quad z\in D. \tag{14}$$

由不等式(13)及(14)就得到

$$|f_1(z)|=|f_2(z)|, \quad z\in D. \tag{15}$$

由条件(10)与(11)知道，函数$f_1(z)$与$f_2(z)$都以$z=\alpha$为零点，且由于变换的双方单值性，根据第一节中的定理2知

道，它们都以 $z=\alpha$ 为一级零点．考虑函数

$$F(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)},$$

由于变换的双方单值性以及上述性质，它就是区域 D 上的解析函数(因为 $z=\alpha$ 是它的可去奇点)．此外，由等式(15)知道：

$$|F(z)|\equiv 1, \quad z\in D.$$

因而，利用第二章中的复习讨论题13知道，存在实数 θ_0，使 $F(z)\equiv e^{i\theta_0}$，即

$$f_1(z)\equiv e^{i\theta_0}f_2(z), \quad z\in D. \tag{16}$$

由此得到 $$\arg f_1'(\alpha)=\theta_0+\arg f_2'(\alpha).$$

再利用条件(10)与(11)，就得到 $\theta_0=0$．这样一来，从等式(16)就得到 $f_1(z)\equiv f_2(z)$，$z\in D$．这就证明了定理1．▌

推论 设 D 与 G 是扩充平面上的两个单连通区域，其边界都至少包有两个点，则对于任意的 $z_0\in D$，$w_0\in G$，必存在唯一个单叶解析函数 $w=f(z)$，它将区域 D 双方单值保形变换到区域 G，且满足条件

$$f(z_0)=w_0, \quad f'(z_0)>0. \tag{17}$$

【证】 根据黎曼存在及唯一性定理，设单叶函数

$$\zeta=\psi(z)$$

将 D 双方单值保形变换到区域 $|\zeta|<1$ 且满足条件 $\psi(z_0)=0$，$\arg\psi'(z_0)>0$，即 $\psi'(z_0)>0$；单叶函数 $\zeta=\varphi(w)$ 将 G 双方单值保形变换到 $|\zeta|<1$，且满足 $\varphi(w_0)=0$，$\varphi'(w_0)=0$．设 $w=\varphi^{-1}(\zeta)$ 是函数 $\zeta=\varphi(w)$ 的反函数，则函数 $w=\varphi^{-1}[\psi(z)]$ 将区域 D 双方单值保形变换到区域 G，且满足

$$\varphi^{-1}[\psi(z_0)]=\varphi^{-1}(0)=w_0$$

及 $(\varphi^{-1}[\psi(z)])'|_{z=z_0}=\varphi^{-1\prime}[\psi(z_0)]\psi'(z_0)$

$$=\varphi^{-1\prime}(0)\psi'(z_0)=\frac{1}{\varphi'(w_0)}\psi'(z_0)>0.$$

因此函数 $w=\varphi^{-1}[\psi(z)]$ 就是我们要求的变换函数 $w=f(z)$.

为了要证明变换的唯一性，设函数 $w=g(z)$ 将区域 D 双方单值地保形变换到区域 G，且满足

$$g(z_0)=w_0,\quad g'(z_0)>0.$$

又设 $z=\varphi^{-1}(\zeta)$ 是上述变换函数 $\zeta=\varphi(z)$ 的反函数，它满足

$$z_0=\psi^{-1}(0),\ \psi^{-1\prime}(0)=\frac{1}{\psi'(z_0)}>0.$$

构造函数 $\zeta_1=\varphi[g[\psi^{-1}(\zeta)]]$，根据上述的两个变换特性，它显然将 $|\zeta|<1$ 双方单值地保形变换到 $|w_1|<1$，且

$$\varphi[g[\psi^{-1}(0)]]=\varphi[g(z_0)]=\varphi(w_0)=0$$

及

$$(\varphi[g[\psi^{-1}(\zeta)]])'|_{\zeta=0}=\varphi'[g[\psi^{-1}(0)]]g'[\psi^{-1}(0)]\psi^{-1\prime}(0)$$

$$=\varphi'(w_0)g'(z_0)\frac{1}{\psi'(z_0)}>0.$$

因为存在分式线性变换 $w_1=L(\zeta)$ 将 $|\zeta|<1$ 双方单值保形变换到 $|w_1|<1$，且满足 $L(0)=0$, $L'(0)>0$. 由于黎曼存在及唯一性定理，这个函数 $L(\zeta)$ 必是唯一的. 这就有

$$\varphi[g[\psi^{-1}(\zeta)]]\equiv L(\zeta),\quad |\zeta|<1.$$

因而有 $$g(z)=\varphi^{-1}[L[\psi(z)]],\quad z\in D.$$

这就证明了变换函数的唯一性. ▌

最后有必要指出：在第二节中的简单区域的变换中，可以在边界上任意指定三对点互相变换，并且它们在边界上的绕行方向是一样的，则这种变换也是唯一的. 对于一般的区域，也有类似的定理：

定理 2 设区域 D 与 G 的边界都是约当闭曲线，在 D 的

边界上按逆时针方向任取三个点 $z_i(i=1, 2, 3)$；在 G 的边界上也按逆时针方向任取三个点 $w_i(i=1, 2, 3)$，则必存在唯一的单叶解析函数 $w=f(z)$，它把区域 D 双方单值保形变换到区域 G，且满足 $w_i=f(z_i)\,(i=1, 2, 3)$。

习 题 7·7

1. 设函数 $w=f(z)$ 在 $|z|<1$ 内单叶解析，且将 $|z|<1$ 变到 $|w|<1$. 试直接证明：它必是分式线性函数.
2. 设函数 $w=f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，$|f(z)|\leqslant 1$. 又设 $z=z_i(i=1, 2, \cdots, s)$ 是函数 $w=f(z)$ 的零点. 求证

$$|f(z)|\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{z-z_i}{1-\bar{z}_i z}\right|,\quad |z|<1.$$

第七章小结

1. 解析函数作为映射能把区域映射到区域，且在其导数不为零的点的邻域上，它具有保持伸缩率及旋转角不变性的两个重要的几何特性. 我们称具有上述两个特性的映射为保形映射. 此外，引进了单叶解析函数的概念，得到了单叶解析函数的反函数仍是单叶解析函数以及单叶解析函数实现保形映射的两个重要定理.

2. 引进了分式线性函数及它所实现的分式线性变换，它本身是由四个最简单的变换组成的，且还具有单叶性、三对对应点唯一决定性、保圆性、保持对称点不变性等重要性质. 这些性质经常可用来寻找一些典型区域的保形变换函数. 这里介绍了三类典型区域的变换函数的特征，即将上半平面映射到上半平面，将上半平面映射到单位圆的内部，将单位圆的内部映射到单位圆的内部的映射函数的特征性质.

3. 讨论了茹科夫斯基函数、幂函数(包括具有复指数的幂函数)、根式函数、指数函数、对数函数、正弦函数、余弦函数、反正弦函数、反余弦函数的各种单叶性区域，它们的映射特征以及它们如何将一些典型区域映射到另一些标准区域的映射性质.

4. 讲到了黎曼-施瓦兹原理的一般形式及边界对应定理，并且应用这两个原理来实现映射. 介绍了对于一些重要的区域如何应用这两个原理来具体寻找映射函数的方法；作为特例，介绍了上半平面映射到多角形的函数，这在很多实际问题中是常常需要用到的. 这里还介绍了雅可比椭圆函数的概念.

5. 介绍了两个单连通区域可以相互映射的黎曼存在定理以及一个重要的引理——施瓦兹引理. 这个引理不仅可以在一些条件下证明映射函数的唯一性，而且可以用来获得函数的模在区域内的精确估计式，这件事情无论在理论上或实用上都是十分重要的.

第七章复习讨论题

1. 解析函数将区域变到区域的证明关键是什么?
2. 单叶解析函数是怎样定义的? 在 $w=z^2$ 的全平面上是不是单叶解析函数?
3. 函数实现保形变换是怎样定义的? 函数 $w=z^5$ 在什么地方实现保形变换? 在什么地方实现单叶保形变换? 试找出10个单叶性区域来.
4. 单叶解析函数是否一定实现双方单值保形变换?
5. 怎样判断一个圆周在经过分式线性变换后变成一个圆周或变成一条直线?
6. 分式线性变换有几个复参数? 有几个实参数? 有几种方法可以唯

一地决定一个分式线性变换?

7. 求三对典型区域的分式线性变换，每一个变换可以有几个参数？它需要几个条件才能确定?

8. 试证：平移变换 $w=z+b$ 可以分解为两个关于直线的对称变换.

9. 试证明：相似变换 $w=kz\ (k>0)$ 可以分解成两个关于圆周 $|w|=R_1$, $|w|=R_2$ 的对称变换，且

$$k=\frac{R_1^2}{R_2^2}.$$

10. 求一个分式线性变换，它将 $-1, i, 1+i$ 对应地变到:

(1) $\infty, i, 1$;　　　　(2) $0, \infty, 1$.

11. 求将圆 $|z|<2$ 变成 $\mathrm{Im} f(z)>0$ 并且 $f(0)=1$, $\arg f'(0)=\frac{\pi}{2}$ 的分式线性变换 $w=f(z)$.

12. 求一个分式线性函数 $w=f(z)$，它将圆 $|z-2|<1$ 变到圆

$$|w-2i|<2,$$

且满足 $f(2)=i$, $\arg f'(2)=0$.

13. 选择一个适当的 h，求将 $\mathrm{Re}\,z>0$ 上除去圆 $|z-h|<1, h>1$ 的区域，双方单值地保形变换到 $1<|w|<2$ 的函数 $w=f(z)$，并求出 h 来.

14. 幂函数所实现的变换有什么性质？它在什么地方实现保形变换?

15. 求函数 z^n (n 为整数)及 e^z 的 10 个单叶性区域.

16. 函数 $w=e^z$ 分别把平行于 x 轴及 y 轴的直线变成怎样的曲线?

17. 试举例说明：函数 $f(z)$ 在一个区域 D 内解析，$f'(z)\neq 0$，但 $f(z)$ 在 D 内不是单叶函数.

18. 试举例说明：单叶函数的加、减、乘、除不一定是单叶函数.

19. 函数序列 $f_n(z)\ (n=1, 2, \cdots)$ 在区域 D 内单叶解析，且它在 D 内闭一致收敛于 $f(z)\neq$ 常数. 试证明：函数 $f(z)$ 也是 D 内的单叶解析函数.

20. 设函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析，$f'(z_0)=0$，则可以找到 $z=z_0$ 的邻域，使 $f(z)$ 在此邻域中不是单叶的.

21. 试叙述边界对应定理. 当两个区域的边界都包有无穷远点时，这个定理是否成立?

22. 函数 $w=z+\frac{z^n}{n}$ 将$|z|<1$变到怎样的区域? 其中 $n\geqslant 2$ 是正整数.

23. 函数 $w=\frac{z}{1+z^2}$ 将半圆$|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$ 变到怎样的区域?

24. 应用边界对应定理,函数$w=\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$可将区域

$$0<\arg z<\frac{\pi}{n}, \quad |z|<1$$

变到怎样的区域?

25. 求将全平面上除去四条射线$(-\infty, -1]$、$[1, +\infty)$、$(-i\infty, -i]$及$[i, +i\infty)$后的区域双方单值保形变换到$|w|>1$的函数.

26. 函数 $w=\cos z$ 将下列区域变到怎样的区域:

(1) $0<x<\frac{\pi}{2}$, $y>0$; (2) $0<x<\pi$, $-h<y<h$, $h>0$.

27. 求将下列区域单叶保形变换到 $\operatorname{Im} w>0$ 的函数 $w=f(z)$:

(1) 带形区域 $0<x<1$ 除去射线 $x=\frac{1}{2}$, $0<h\leqslant y<+\infty$;

(2) 以虚轴及圆周 $|z-1|=1$ 为边界, 除去割线在 $y=0$, $2\leqslant x\leqslant a$ 及 $y=0$, $b\leqslant x<+\infty$ $(2<a<b)$后的区域.

28. 克里斯托弗-施瓦兹公式是怎样的? 它能将什么区域变到什么区域?

29. 直接验证函数 $w=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ $(0<k<1)$将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 双方单值保形变换到上半平面上的某个关于虚轴对称的矩形$(-K)K(K+iK')(-K+iK')$,其中

$$K=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$K'=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}, \quad k'^2=1-k^2.$$

如果已给矩形 $(-A)A(A+iB')(-A+iB')$(其中 $A>0$, $B>0$), 问如何求 k、$0<k<1$ 与 C_1, 使函数

$$w=C_1\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

正好将 $\operatorname{Im} z>0$ 双方单值保形变换到这个矩形?

30．利用克里斯托弗-施瓦兹公式，求将 $\mathrm{Im}\, z>0$ 双方单值保形变换到下列区域的函数 $w=f(z)$：

(1) 全平面上除去正实轴后的区域；

(2) $0<\mathrm{Im}\, w<h$ 且满足 $f(-1)=-\infty$，$f(1)=+\infty$；

(3) 内角为 $\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{2}$ 的三角形，且满足 $f(0)=0$，$f(1)=a>0$，$f(\infty)=a+\frac{ia}{3}$；

(4) 如图 7-45 所示：$f(0)=A$，$f(1)=B$，$f(\infty)=\infty$。

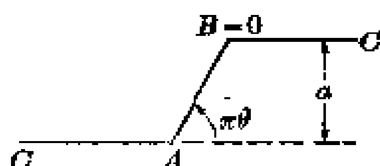


图 7-45

31．试述黎曼存在及唯一性定理，它有几种形式？

32．两个单连通区域之间是否一定可以实现双方单值保形变换？两个多连通区域呢？

33．求将单位圆 $|z|<1$ 变到以四个点 $A+iB$、$-A+iB$、$-A-iB$、$A-iB$ 为顶点的矩阵的单叶解析函数 $w=f(z)$，且满足

$$f(e^{a\pi i})=A+iB,\quad f(e^{(1-a)\pi i})=-A+iB,$$
$$f(e^{(1+a)\pi i})=-A-iB,\ f(e^{(2-a)\pi i})=A-iB,$$

其中 $$A>0,\quad B>0,\quad 0<a<\frac{1}{2}.$$

第八章

拉普拉斯变换初步

拉普拉斯(Laplace)变换是一种积分变换,它在理论上及各种数学物理问题中都有重要的应用. 例如,可将拉普拉斯变换用来解常系数微分方程及偏微分方程. 它不同于过去所用的方法,而是先对微分方程中的未知函数作拉普拉斯变换,将原来的问题转化为代数方程的求解问题. 在解出了这个代数方程的解以后,再用拉普拉斯变换的反变换就可以求出微分方程的解了. 用这种方法来解微分方程,可以将解表示为更紧凑的形式,并在某些情况下可减少计算量. 本章中介绍拉普拉斯的一些基本概念、性质及求解的方法,然后以几个例子说明如何应用这些方法来解常系数微分方程及偏微分方程.

第一节 含有参变量的积分

这一节是为下面几节作理论上的准备的.

设 D 是一个区域, L 是一条逐段光滑曲线,它可以延伸到无穷远处,把曲线 L 在圆 $|z|\leqslant R$ 内的那一段弧记为 L_R. 设两元函数 $f(\zeta, z)$ 定义在 $L\times D$ 上,它对每一个 $\zeta\in L$ 是 z 在 D 内的解析函数,且是 $\zeta\in L$, $z\in D$ 的两元连续函数.

定义 1 若对每一个 $z\in D$, 存在极限

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{L_R} f(\zeta, z)d\zeta=F(z), \tag{1}$$

则称积分 $\int_L f(\zeta, z)d\zeta$ 在 D 内收敛，记作 $\int_L f(\zeta, z)\, d\zeta = F(z)$；

若对任意的 $z\in D$，存在极限

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{L_R}|f(\zeta, z)||d\zeta|, \tag{2}$$

则称积分 $\int_L f(\zeta, z)d\zeta$ 在 D 内绝对收敛；

若对任意的有界闭集 $F\subset D$，任给 $\varepsilon>0$，存在数 R_1，使当 $R\geqslant R_1$ 时，有

$$\left|\int_{L_R} f(\zeta, z)\, d\zeta - F(z)\right| < \varepsilon \quad (z\in F), \tag{3}$$

则称积分 $\int_L f(\zeta, z)d\zeta$ 在 D 内闭一致收敛于函数 $F(z)$.

与第四章中级数的理论相类似，有下列几个定理：

定理 1 设积分(1)在 D 内闭一致收敛于函数 $F(z)$，则 $F(z)$ 是 D 内的连续函数.

【证】 首先证：对任意的 R，函数 $F_R(z)=\int_{L_R} f(\zeta, z)d\zeta$ 是 D 内的连续函数. 设 $z_0\in D$，存在 z_0 的邻域 $|z-z_0|<\rho$，它全部属于区域 D. 由于函数 $f(\zeta, z)$ 在闭集 $\Gamma_R(\zeta\in\Gamma_R)$，$|z-z_0|\leqslant\frac{\rho}{2}$ 上的连续性，所以根据第二章中闭集上连续函数的性质（参看第二章第一节定理 5）（对二元函数也可同样地证明）知道：函数 $f(\zeta, z)$ 在 $\Gamma_R(\zeta\in\Gamma_R)$，$|z-z_0|\leqslant\frac{\rho}{2}$ 上一致连续，即任给 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，$\delta<\frac{\rho}{2}$，使得对于任意点 ζ_1、ζ_2 及 z_1、z_2，只要 $\zeta_1\in\Gamma_R$、$\zeta_2\in\Gamma_R$，$|\zeta_1-\zeta_2|<\delta$，$|z_1-z_0|\leqslant\frac{\rho}{2}$，

$|z_2-z_0|\leqslant\frac{\rho}{2}$, $|z_1-z_2|<\delta$, 就有 $|f(\zeta_1, z_1)-f(\zeta_2, z_2)|<\varepsilon$.
因此当 $|z-z_0|<\delta$ 时, 就有

$$|F_R(z)-F_R(z_0)|=\left|\int_{L_R}f(\zeta, z)d\zeta-\int_{L_R}f(\zeta, z_0)d\zeta\right|$$

$$\leqslant\int_{L_R}|f(\zeta, z)-f(\zeta, z_0)|\,|d\zeta|\leqslant\varepsilon\ (L_R\text{ 的长度}).$$

这就证明了 $F_R(z)$ 在 $z=z_0$ 处的连续性.

此外, 由于 $F_R(z)$ 在 D 内闭一致收敛于 $F(z)$, 则由定义知, 当 $|z-z_0|<\delta$ 时, 存在 R_1, 使当 $R\geqslant R_1$ 时, 就有

$$|F_R(z)-F(z)|<\varepsilon,\quad |z-z_0|<\delta. \tag{4}$$

因此, 应用三角不等式及不等式(4), 就得到: 当 $|z-z_0|<\delta$ 时,

$$|F(z)-F(z_0)|\leqslant|F(z)-F_{R_1}(z)|+|F_{R_1}(z)-F_{R_1}(z_0)|$$
$$+|F_{R_1}(z_0)-F(z_0)|\leqslant2\varepsilon+|F_{R_1}(z)-F_{R_1}(z_0)|. \tag{5}$$

由于函数 $F_{R_1}(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续, 因此存在数 $\delta_1>0$, 当 $|z-z_0|<\delta_1$ 时, 有 $|F_{R_1}(z)-F_{R_1}(z_0)|<\varepsilon$. 由此从(5)推出: 当 $|z-z_0|<\min(\delta_1, \delta)$ 时, 有

$$|F(z)-F(z_0)|\leqslant2\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.$$

这就证明了函数 $F(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续. 由于 z_0 是 D 内的任一点, 因而本定理得证. ▌

定理 2 设积分 $\int_L f(\zeta, z)d\zeta$ 在 D 内闭一致收敛于函数 $F(z)$, 则在 D 内的任何曲线上, 都可以在积分号下求积分:

$$\int_C F(z)dz=\int_C\left(\int_L f(\zeta, z)\,d\zeta\right)dz=\int_L\left(\int_C f(\zeta, z)\,dz\right)d\zeta. \tag{6}$$

【证】 如同证明定理 1 一样, 可以证明函数 $\int_C f(\zeta, z)\,dz$ 在 $\zeta\in L$ 上连续. 因此就有

$$\left|\int_{L_R}\left(\int_C f(\zeta, z)dz\right)d\zeta-\int_C F(z)dz\right|$$
$$=\left|\int_C\left(\int_{L_R} f(\zeta, z)\ d\zeta\right)dz-\int_C F(z)dz\right|^{*)}$$
$$\leqslant\int_C\left|\int_{L_R} f(\zeta, z)dz-F(z)\right||dz|. \qquad (7)$$

根据一致收敛性的条件，任给 $\varepsilon>0$，存在数 R_1，当 $R\geqslant R_1$ 时，

$$\left|\int_{L_R} f(\zeta, z)d\zeta-F(z)\right|<\varepsilon \quad (z\in C). \qquad (8)$$

由此，从(7)与(8)就得到

$$\left|\int_{L_R}\left(\int_C f(\zeta, z)dz\right)d\zeta-\int_C F(z)dz\right|\leqslant\varepsilon\ (C\text{ 的长度}). \ \blacksquare$$

注 从定理 1 与定理 2 的证明过程中可以看出：这里只用到了函数 $f(\zeta, z)$ 在 $\zeta\in L$, $z\in D$ 上的二元连续性.

定理 3 设积分 $\int_L f(\zeta, z)d\zeta$ 在 D 内闭一致收敛于函数 $F(z)$，则 $F(z)$ 是 D 内的解析函数，且

$$F'(z)=\int_L\frac{\partial f(\zeta, z)}{\partial z}d\zeta. \qquad (9)$$

【证】 首先由定理 1 知道，$F(z)$ 在 D 内连续. 设 $z_0\in D$，则存在圆 $|z-z_0|\leqslant\rho\subset D$. 对于 $|z-z_0|\leqslant\rho$ 内的任一条闭曲线 C，利用定理 2 及第三章中的柯西定理，得

$$\int_C F(z)dz=\int_L\left(\int_C f(\zeta, z)dz\right)d\zeta=0.$$

因而，根据第三章中的莫瑞拉定理知道：函数 $F(z)$ 在 $|z-z_0|<\rho$ 内解析. 由于 z_0 是 D 内的任意点，因此 $F(z)$ 在 D 内解析.

---

*) 这里可以象在微积分学中一样，证明积分次序可以交换，这只要注意到它们可以化为曲线参数方程的积分即可.

对于任意的 $z_0\in D$，应用柯西公式后，得到

$$f(\zeta, z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta, \tau)}{\tau-z}d\tau, \quad |z-z_0|<\rho. \tag{10}$$

由于 $\int_L f(\zeta, \tau)d\zeta$ 在 $\tau\in D$ 内闭一致收敛于 $F(\tau)$，因而当 $|\tau-z_0|=\rho$，$|z-z_0|\leqslant\frac{\rho}{2}$ 时，积分 $\int_L\frac{f(\zeta, \tau)}{(\tau-z)^2}d\zeta=\frac{F(\tau)}{(\tau-z)^2}$ 也是一致收敛. 应用定理 2，就得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}&\int_{|\tau-z_0|=\rho}\frac{F(\tau)}{(\tau-z)^2}d\tau\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau-z_0|=\rho}\left(\frac{1}{(\tau-z)^2}\int_L f(\zeta, \tau)d\zeta\right)d\tau\\&=\int_L\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta, \tau)}{(\tau-z)^2}d\tau\right)d\zeta.\end{aligned}$$

由此，利用公式(10)及第四章的高阶导数公式，就得到

$$F'(z)=\int_L\frac{\partial f(\zeta, z)}{\partial z}d\zeta, \quad |z-z_0|<\frac{\rho}{2}.$$

由于 z_0 是 D 中的任一点，所以(9)对于任意的 z 都成立。】

第二节　拉普拉斯变换的概念

设函数 $f(t)$ 定义在实轴上，假定它满足下列三个条件：

1)　当 $t<0$ 时，$f(t)=0$；

2)　当 $t\geqslant 0$ 时，$f(t)$ 在任何有界区间上至多只有有限个间断点(因此 $f(t)$ 在任何有界区间上可积)；

3)　当 $t\to+\infty$ 时，$f(t)$ 具有有限增长性，即存在常数 $M>0$ 及 $a>0$，使得

$$|f(t)|\leqslant Me^{at}\quad (t>0). \tag{1}$$

定义 1　对于任何满足上面三个条件的函数 $f(t)$，称满

足(1)的 a 的下确界为函数 $f(t)$ 的增长性指示数.

为了今后书写方便,我们只写出函数 $f(t)$ 在 $t>0$ 时的函数表示式.

【例 1】 求函数 $f(t)=t^n$(n 为自然数)的增长性指示数.

解:显然对任何 $a>0$,存在数 $M>0$,使得(1)成立,因此,t^n 的增长性指示数为零.

此外,今后也可以考虑实变量 t 的复函数 $f(t)=f_1(t)+if_2(t)$,其中 $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$ 都满足上述三个条件.

定义 2 对于满足上述三个条件的函数 $f(t)$,构造积分

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{pt} f(t)\,dt, \tag{2}$$

其中 p 可以是复数. 若积分(2)对于一些复数 p 存在,则称函数 $F(p)$ 为函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换,记作

$$f(t) \to F(p). \tag{3}$$

或称 $F(p)$ 为 $f(t)$ 的象,$f(t)$ 是 $F(p)$ 的原象.

应当指出:对于上述的 $f(t)$,积分(2)对于一些复数 p 总是存在的. 事实上,这有下面的定理:

定理 1 设 b 为函数 $f(t)$ 的增长性指示数,则积分(2)在 $\operatorname{Re} p>b$ 上绝对收敛,且在任何闭区域 $\operatorname{Re} p \geqslant c>b$ 上一致收敛.

【证】 设 $p=\sigma+is$. 当 $\operatorname{Re} p>b$ 时,必存在数 $\varepsilon>0$,使得 $\operatorname{Re} p=\sigma>b+\varepsilon$. 此外,由定义 1 知道,必存在数 $M>0$,使得 $|f(t)| \leqslant M e^{(b+\varepsilon)t} \quad (t>0)$. 于是就有

$$\int_0^{+\infty} |e^{-pt}|\,|f(t)|\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\sigma t} M e^{(b+\varepsilon)t} dt$$

$$=\frac{M}{\sigma-(b+\varepsilon)} \quad (\sigma>b+\varepsilon). \tag{4}$$

这就证明了 $\operatorname{Re} p>b$ 时,积分(2)的绝对收敛性.

同样，当 $\operatorname{Re} p \geqslant c > b$ 时，有 $\operatorname{Re} p \geqslant c > b + \varepsilon$，因而有

$$\int_0^{+\infty} |e^{-pt}| \, |f(t)| \, dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-ct} M e^{(b+\varepsilon)t} dt \leqslant \frac{M}{c-(b+\varepsilon)}.$$

这就证明了积分(2)在 $\operatorname{Re} p \geqslant c > b$ 上的一致收敛性. ▮

注 1 从不等式(4)立刻得到

$$\lim_{\operatorname{Re} p \to +\infty} F(p) = 0. \tag{5}$$

注 2 若函数 $f(t)$ 不满足上述三个条件，只要存在数 b，使得 $\int_0^{+\infty} |e^{-bt} f(t)| dt$ 存在，则应用微积分学上的狄利克雷(Dirichlet)判别法，积分(2)在区域 $\operatorname{Re} p \geqslant c > b$ 上仍然一致收敛.

事实上，这有

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-b)t} e^{-bt} f(t) dt,$$

再利用 $\int_0^{+\infty} |e^{-bt} f(t)| dt$ 收敛，$e^{-(p-b)t}$ 在 $\operatorname{Re} p \geqslant c > b$ 上一致单调下降趋于零即是.

定理 2 设 b 是函数 $f(t)$ 的增长性指示数，则函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(p)$ 是 $\operatorname{Re} p > b$ 中的解析函数.

【证】 显然，对于任意的 $t \in [0, +\infty)$，函数 $e^{-pt} f(t)$ 是自变量 p 在 $\operatorname{Re} p > b$ 内的解析函数，且是两个变量 p 与 t 在 $\operatorname{Re} p > a$ 及 $0 \leqslant t < +\infty$ 上的逐段连续函数. 由定理 1 知道，积分(2)在 $\operatorname{Re} p \geqslant c > b$ 上一致收敛，因此根据第一节中的定理 3，函数 $F(p)$ 是 $\operatorname{Re} p > b$ 上的解析函数. ▮

【例 2】 求海维赛德(Heaviside)函数

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

的拉普拉斯变换.

解：$1 \to F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \dfrac{1}{p} \quad (\mathrm{Re}\,p > 0)$. (6)

这里用到函数 1 的增长性指示数为零.

【例 3】 求 $f(t) = t$ 的拉普拉斯变换.

解：因为 $f(t) = t$ 的增长性指示数为零，因此当 $\mathrm{Re}\,p > 0$ 时，有

$$\begin{aligned} t \to F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, t\, dt = -\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} t\, de^{-pt} \\ &= -\frac{1}{p}\left[t e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt \right] \\ &= \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = -\frac{1}{p^2} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

【例 4】 求 $f(t) = t^\nu$, $\nu > -1$ 的拉普拉斯变换.

解：由于 $f(t) = t^\nu$ 的增长性指示数也是零，因此当 $\mathrm{Re}\,p > 0$ 时，有

$$t^\nu \to F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^\nu dt. \tag{8}$$

因为 $F(p)$ 是 $\mathrm{Re}\,p > 0$ 上的解析函数，所以为了求其表示式，先考虑 $p = \sigma > 0$ 的情况. 令 $\sigma t = \tau$，则公式(8)就变为

$$F(\sigma) = \frac{1}{\sigma^{\nu+1}}\int_0^{+\infty} e^{-\tau} \tau^\nu d\tau = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sigma^{\nu+1}}. \tag{9}$$

已知，当 $\nu > -1$ 时，函数 $\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$ 的一个分支在 $\mathrm{Re}\,p > 0$ 时解析，且当 $p = \sigma > 0$ 时的值为 $\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{\sigma^{\nu+1}}$，因此，根据解析函数的唯一性定理(见第四章第二节定理 4)，就有

$$t^\nu \to F(p) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \quad \nu > -1,\ \mathrm{Re}\,p > 0. \tag{10}$$

【例 5】 求 t^n、$t^{-\frac{1}{2}}$ 及 $t^{\frac{1}{2}}$ 的拉普拉斯变换.

解：在公式(10)中分别令 $\nu=n$, $\nu=-\frac{1}{2}$ 及 $\nu=\frac{1}{2}$ 后得到

$$t^n \to F(p)=\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}=\frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p>0. \tag{11}$$

$$t^{-\frac{1}{2}} \to F(p)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{p^{\frac{1}{2}}}, \quad \operatorname{Re} p>0. \tag{12}$$

$$t^{\frac{1}{2}} \to F(p)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{p^{\frac{1}{2}+1}}=\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}, \quad \operatorname{Re} p>0. \tag{13}$$

【例 6】 求 $f(t)=e^{at}$ 的拉普拉斯变换.

解：由于 $f(t)=e^{at}$ 的增长性指示数为 $\operatorname{Re} a$, 因此当 $\operatorname{Re} p>\operatorname{Re} a$ 时, 有

$$e^{at} \to F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{at}dt=\frac{1}{p-a}, \quad \operatorname{Re} p>\operatorname{Re} a. \tag{14}$$

习 题 8·2

1. 求下列函数的拉普拉斯变换:

(1) $(t-3)^2$;　　(2) $\operatorname{sh} t$;

(3) te^{-at};　　(4) $\frac{1}{a}(1-e^{-at})$ (a 为实数).

第三节　拉普拉斯变换的性质

上一节介绍了几个简单函数的拉普拉斯变换. 本节要研究拉普拉斯变换的性质, 利用这些性质就可以得到比较复杂的函数的拉普拉斯变换.

1．线性性质

设函数 $f_i(t)$ 的增长性指示数为 a_i $(1\leqslant i\leqslant n)$，且 $f_i(t)\to F_i(p)$，$\mathrm{Re}\,p>a_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，则对任意的复数 $b_i(1\leqslant i\leqslant n)$，有

$$\sum_{i=1}^{n} b_i f_i(t)\to\sum_{i=1}^{n} b_i F_i(p),\quad \mathrm{Re}\,p>\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}.$$

事实上，当 $\mathrm{Re}\,p>\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}$时，利用积分的性质，就有

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sum_{i=1}^{n} b_i f_i(t)dt=\sum_{i=1}^{n} b_i\int_0^{+\infty} e^{-pt} f_i(t)dt=\sum_{i=1}^{n} b_i F_i(p).$$

【例 1】 求 $f(t)=\sin\omega t$ 的拉普拉斯变换.

解：因为$\sin\omega t=\dfrac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}$，且由上节例 6 知

$$e^{i\omega t}\to\frac{1}{p-i\omega},\quad \mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,i\omega=-\mathrm{Im}\,\omega;\tag{1}$$

$$e^{-i\omega t}\to\frac{1}{p+i\omega},\quad \mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}(-i\omega)=\mathrm{Im}\,\omega.\tag{2}$$

因此，从线性性质及上述公式(1)与(2)得到

$$\sin\omega t=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\to\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)$$

$$=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},\quad \mathrm{Re}\,p>|\mathrm{Im}\,\omega|.\tag{3}$$

【例 2】 求 $\cos\omega t$ 的拉普拉斯变换.

解：由线性性质及上述公式(1)、(2)得到

$$\cos\omega t=\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\to\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right)$$

$$=\frac{p}{p^2+\omega^2},\quad \mathrm{Re}\,p>|\mathrm{Im}\,\omega|.\tag{4}$$

2．相似性质

设 $f(t)\to F(p)$，$\mathrm{Re}\,p>a$，则当 $b>0$ 时，

$$f(bt)\to\frac{1}{b}F\left(\frac{p}{b}\right),\ \mathrm{Re}\,p>ab.$$

事实上，有

$$\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(bt)\,dt=\frac{1}{b}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{p}{b}\tau}f(\tau)\,d\tau$$

$$=\frac{1}{b}F\left(\frac{p}{b}\right),\qquad \mathrm{Re}\,\frac{p}{b}>a.$$

3. 延迟性质

设 $f(t)\to F(p)$，$\mathrm{Re}\,p>a$，考虑函数

$$f_\tau(t)=\begin{cases}0, & t<\tau\\ f(t-\tau), & t\geqslant\tau\end{cases}\quad(\tau>0),$$

则
$$f_\tau(t)\to e^{-p\tau}F(p),\ \mathrm{Re}\,p>a.$$

事实上，有

$$f_\tau(t)\to\int_0^{+\infty}e^{-pt}f_\tau(t)\,dt=\int_\tau^{+\infty}e^{-pt}f(t-\tau)\,dt$$

$$=e^{-p\tau}\int_0^{+\infty}e^{-ps}f(s)\,ds=e^{-p\tau}F(p),\ \mathrm{Re}\,p>a.$$

利用上述延迟性质，可以得到周期函数的拉普拉斯变换的一般公式．设 $f(t)$ 在正实轴上具有周期为 τ：

$$f(t+\tau)=f(t),\qquad t>0,\ \tau>0,$$

且 $f(t)\to F(p)$，$\mathrm{Re}\,p>a$．我们的目的是要求出 $F(p)$ 的表示式．

设
$$\varphi(t)=\begin{cases}f(t), & 0\leqslant t<\tau;\\ 0, & t\geqslant\tau.\end{cases}$$

如果 $\varphi(t)$ 的拉普拉斯变换 $\Phi(p)$ 可以求出来，则

$$F(p)=\frac{\Phi(p)}{1-e^{-p\tau}},\qquad \mathrm{Re}\,p>a.\tag{5}$$

事实上，设 $\varphi(t)=f_1(t)+f_2(t)$，其中

$$f_1(t)=\begin{cases} f(t), & 0\leqslant t\leqslant\tau, \\ \text{取任何值，但满足上述三个条件，} & t>\tau, \end{cases}$$

$$f_1(t)\to F_1(p),\ \operatorname{Re}p>a,$$

及

$$f_2(t)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant t\leqslant\tau, \\ -f_1(t)=-f_1(t+\tau-\tau), & t>\tau, \end{cases}$$

$$f_2(t)\to F_2(p),\ \operatorname{Re}p>a.$$

因此，若 $f_1(t+\tau)\to F_{1\tau}(p)$，则由延迟性质知道

$$F_2(p)=-e^{-p\tau}F_{1\tau}(p). \tag{6}$$

由此，从线性性质得到

$$\varphi(t)\to\Phi(p)=F_1(p)+F_2(p)=F_1(p)-e^{-p\tau}F_{1\tau}(p). \tag{7}$$

特别地，取 $f_1(t)=f(t)$ 时，$f_1(t+\tau)=f(t+\tau)=f(t)$，所以 $F_{1\tau}(p)=F(p)$，$F_1(p)=F(p)$，因此由(7)得到

$$\Phi(p)=F(p)-e^{-p\tau}F(p).$$

由此即证得公式(5)．在具体应用公式(5)时，注意到公式(7)，就需要适当构造 $f_1(t)$，然后求出 $F_1(p)$ 及 $F_{1\tau}(p)$ 就行了．

【例 3】 求 $f(t)=|\sin\omega t|$ 的拉普拉斯变换，ω 为实数．

解：函数 $f(t)$ 具有周期 $\tau=\dfrac{\pi}{\omega}$，取

$$f_1(t)=\sin\omega t\to F_1(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},\quad \operatorname{Re}p>|\operatorname{Im}\omega|=0. \tag{8}$$

因此，

$$\begin{aligned} f_1(t+\tau)\to F_{1\tau}(t) &=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega\left(t+\frac{\pi}{\omega}\right)dt \\ &=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin(\omega t+\pi)dt \\ &=-\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega t\,dt=-F_1(p). \end{aligned} \tag{9}$$

将(8)与(9)代入(7)，得到

$$\Phi(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}+e^{-p\frac{\pi}{\omega}}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\left(1+e^{-\frac{p\pi}{\omega}}\right),$$
$$\operatorname{Re} p>0.$$

由此从(5)得到

$$|\sin\omega t|\to F(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1+e^{-\frac{p\pi}{\omega}}}{1-e^{-\frac{p\pi}{\omega}}}$$
$$=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\operatorname{cth}\frac{p\pi}{2\omega},\quad \operatorname{Re} p>0. \tag{10}$$

4. 导数性质

设 $f(t)\to F(p)$, $\operatorname{Re} p>a$, 且函数 $f'(t)$ 满足第一节中的三个性质, 则

$$f'(t)\to pF(p)-f(0),\quad \operatorname{Re} p>a. \tag{11}$$

事实上, 当 $\operatorname{Re} p>a$ 时, 就有

$$f'(t)\to\int_0^{+\infty}e^{-pt}f'(t)dt=e^{-pt}f(t)\Big|_0^{+\infty}+p\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt$$
$$=-f(0)+pF(p).$$

这里用到 $|f(t)|\leqslant Me^{at}$, $\operatorname{Re} p>a$.

若所有的函数 $f^{(s)}(t)$ $(s=1,2,\cdots,n)$ 都满足第一节的三个条件, 则

$$f^{(n)}(t)\to p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0). \tag{12}$$

事实上, 由于 $f^{(s)}(t)=[f^{(s-1)}(t)]'$, 设 $f^{(s)}(t)\to F_s(p)$, 则由(11)得到

$$f^{(s)}(t)\to pF_{s-1}(p)-f^{(s-1)}(0)\quad(s=1,2,\cdots,n),$$
$$F_0(p)=F(p),\ \operatorname{Re} p>a.$$

由此分别令 $s=1,2,\cdots,n$, 得到

$$f'(t)\to F_1(p)=pF(p)-f(0),$$
$$f''(t)\to F_2(p)=pF_1(p)-f'(0),$$

$$f'''(t)\to F_3(p)=pF_2(p)-f''(0),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n-1)}(t)\to F_{n-1}(p)=pF_{n-2}(p)-f^{(n-2)}(0),$$

$$f^{(n)}(t)\to F_n(p)=pF_{n-1}(p)-f^{(n-1)}(0).$$

由此不断将上一式代入下一式，即可得到公式(12)．

注 若 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，则

$$f^{(n)}(t)\to p^nF(p). \tag{13}$$

这个性质在微分方程求解时有重要作用，将在第五节中作详细讨论．现举一简例说明：已知函数 $\sin\omega t$ 的拉普拉斯变换有公式(3)，由于 $\sin\omega t\big|_{t=0}=0$，所以由(13)得到

$$(\sin\omega t)'=\omega\cos\omega t\to\frac{p\omega}{p^2+\omega^2},\quad \operatorname{Re}p>|\operatorname{Im}\omega|.$$

从而得到公式(4)．

5．积分性质

设 $f(t)\to F(p)$，$\operatorname{Re}p>a$，则

$$\int_0^t f(t)dt\to\frac{F(p)}{p},\quad \operatorname{Re}p>a. \tag{14}$$

事实上，函数 $g(t)=\int_0^t f(t)dt$ 也满足第一节中的三个性质，$g(0)=0$．设 $g(t)\to G(p)$，$\operatorname{Re}p>a$，则由导数性质得到

$$g'(t)\to pG'(p),\quad \operatorname{Re}p>a.$$

由于 $g'(t)=f(t)$，因此得到 $F(p)=pG(p)$，此即公式(14)．

例如，由(3)及公式(14)得到

$$\int_0^t\sin\omega t\,dt\to\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)p},\quad \operatorname{Re}p>|\operatorname{Im}\omega|,$$

即

$$\frac{1}{\omega}(1-\cos\omega t)\to\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)p},\quad \operatorname{Re}p>|\operatorname{Im}\omega|. \tag{15}$$

利用 $1\to\dfrac{1}{p}$（见第一节公式(6)）及线性性质，得到

$$-\frac{\cos\omega t}{\omega}\to\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)p}-\frac{1}{\omega p}=\frac{-p}{p^2+\omega^2},\quad \mathrm{Re}\,p>|\mathrm{Im}\,\omega|.$$

由此又重新得到公式(4)．

反复应用积分性质，可以得到

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}}f(t_n)dt\to\frac{F(p)}{p^n},\quad \mathrm{Re}\,p>a.$$

6．象的延迟性质

设 $f(t)\to F(p)$，$\mathrm{Re}\,p>a$，则

$$e^{bt}f(t)\to F(p-b),\ \mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,b+a.\tag{16}$$

事实上，有

$$\int_0^{+\infty}e^{-pt}e^{bt}f(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-(p-b)t}f(t)dt=F(p-b),$$

$$\mathrm{Re}(p-b)>a.$$

【例 4】 求 $\dfrac{t^n}{n!}e^{bt}$ 的拉普拉斯变换．

解：由第一节的公式(11)得到 $\dfrac{t^n}{n!}\to\dfrac{1}{p^{n+1}}$，$\mathrm{Re}\,p>0$．再应用公式(16)，就得

$$\frac{t^n}{n!}e^{bt}\to\frac{1}{(p-b)^{n+1}},\quad \mathrm{Re}\,z>\mathrm{Re}\,b.\tag{17}$$

【例 5】 求 $\dfrac{e^{b_1t}-e^{b_2t}}{b_1-b_2}$ 的拉普拉斯变换．

解：由第一节例 1 知 $1\to\dfrac{1}{p}$，$p>0$，因此由上述象的延迟性质，得到

$$e^{b_it}\to\frac{1}{p-b_i},\quad \mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,b_i\quad(i=1,\ 2),$$

再由线性性质得到

$$\frac{e^{b_1t}-e^{b_2t}}{b_1-b_2}\to\frac{1}{b_1-b_2}\left(\frac{1}{p-b_1}-\frac{1}{p-b_2}\right)$$

$$=\frac{1}{(p-b_1)(p-b_2)},\quad \mathrm{Re}\,p>\max(\mathrm{Re}\,b_1,\mathrm{Re}\,b_2).\tag{18}$$

【例 6】 求 $e^{at}\sin\omega t$ 的拉普拉斯变换.

解：由(3)及利用象的延迟性质，就得到

$$e^{at}\sin\omega t\to\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2},\quad \mathrm{Re}\,p>|\mathrm{Im}\,\omega|+\mathrm{Re}\,a.\tag{19}$$

【例 7】 求 $e^{at}\cos\omega t$ 的拉普拉斯变换.

解：由(4)及利用象的延迟性质，就得到

$$e^{at}\cos\omega t\to\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2},\quad \mathrm{Re}\,p>|\mathrm{Im}\,\omega|+\mathrm{Re}\,a.\tag{20}$$

7. 象的导数性质

设 $f(t)\to F(p)$, $\mathrm{Re}\,p>a$，则

$$(-t)f(t)\to F'(p),\quad \mathrm{Re}\,p>a.\tag{21}$$

事实上，有

$$\int_0^{+\infty}e^{-pt}(-t)f(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{de^{-pt}}{dp}f(t)dt$$

$$=\frac{d}{dp}\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt=F'(p).$$

这里因为被积函数 $f(t)e^{-pt}$ 的积分在 $\mathrm{Re}\,p\geqslant b>a$ 上一致收敛，所以象魏尔斯特拉斯定理的证明一样，可以在积分号下求导数.

一般地，对于任何自然数 n，有

$$(-t)^nf(t)\to F^{(n)}(p),\quad \mathrm{Re}\,p>a.\tag{22}$$

【例 8】 求 $t\sin\omega t$ 的拉普拉斯变换.

解：由公式(3)，利用象的导数性质，得到

$$(-t)\sin\omega t\to\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)'=\frac{-2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2},\quad \mathrm{Re}\,p>|\mathrm{Im}\,\omega|,$$

即

$$t\sin\omega t\to\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2},\quad \operatorname{Re}p>|\operatorname{Im}\omega|. \tag{23}$$

【例 9】 求 $t\cos\omega t$ 的拉普拉斯变换.

解：由公式(4)，利用象的导数性质，就有

$$(-t)\cos\omega t\to\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right)'=\frac{\omega^2-p^2}{(p^2+\omega^2)^2},\quad \operatorname{Re}p>|\operatorname{Im}\omega|,$$

即

$$t\cos t\to\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2},\quad \operatorname{Re}p>|\operatorname{Im}\omega|. \tag{24}$$

8. 象的积分性质

设 $f(t)\to F(p)$, $\operatorname{Re}p>a$, 且 $\frac{f(t)}{t}$ 也满足第一节中的三个条件，则

$$\frac{f(t)}{t}\to\int_p^\infty F(\tau)d\tau,\quad \operatorname{Re}p>a. \tag{25}$$

事实上，设 $\frac{f(t)}{t}\to G(p)$，则由第一节中定理 1 的注 1 知

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\ \operatorname{Re}p\geq a+\varepsilon}} G(p)=0. \tag{26}$$

此外，由象的导数性质知道：

$$(-t)\frac{f(t)}{t}\to G'(p),$$

即

$$f(t)\to -G'(p).$$

因而有 $F(p)=-G'(p)$. 由此利用公式(26)及解析函数积分与路径无关的性质，就得到

$$G(p)=\int_p^\infty F(\tau)d\tau.$$

【例 10】 求 $\frac{\sin\omega t}{t}$ 的拉普拉斯变换.

解：由公式(3)及上述象的积分性质，就得到

$$\frac{\sin \omega t}{t} \to \int_p^{\infty} \frac{\omega}{\tau^2+\omega^2} d\tau = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{p}{\omega}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|. \tag{27}$$

【例 11】 求 $\operatorname{si} t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$ 的拉普拉斯变换.

解：由(27)得到

$$\frac{\sin t}{t} \to \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} p, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

再利用前面的积分性质，就得到

$$\operatorname{si} t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \to \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} p\right), \quad \operatorname{Re} p > 0. \tag{28}$$

9. 卷积性质

设 $f_i(t) \to F_i(p)$, $\operatorname{Re} p > a_i (i=1, 2)$，则卷积

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_2(\tau) \cdot f_1(t-\tau) d\tau \tag{29}$$

的拉普拉斯变换有公式

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) dt \to F_1(p) \cdot F_2(p),$$

$$\operatorname{Re} p > \max(a_1, a_2). \tag{30}$$

事实上，设 $|f_i(t)| \leqslant M_i e^{a_i t}$，其中 M_i $(i=1, 2)$是常数，显然卷积(29)就满足第一节中的前两个条件，至于第三个条件，可以从下面的推导看出：

$$|\varphi(t)| \leqslant M_1 M_2 \int_0^t e^{a_1 \tau} e^{a_2(t-\tau)} d\tau$$

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{M_1 M_2}{a_1 - a_2}(e^{a_1 t} - e^{a_2 t}) \leqslant \dfrac{M_1 M_2}{|a_1 - a_2|} e^{at}, \\ \qquad a_1 \neq a_2, \ a = \max(a_1, a_2); \\ M_1 M_2 t e^{at}, \qquad a_1 = a_2 = a. \end{cases}$$

由此，可以得到

$$\varphi(t)\rightarrow\int_0^{+\infty}e^{-pt}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]dt.$$

这里可以将累次积分看作二重积分，因为二重积分是绝对收敛的．然后，再化二重积分为先对 t 积分，再对 τ 积分．从而，上式右边的积分可以化为

$$\begin{aligned}\varphi(t)&\rightarrow\int_0^{+\infty}f_1(\tau)d\tau\left[\int_\tau^{+\infty}e^{-pt}f_2(t-\tau)dt\right]\\&=\int_0^{+\infty}e^{-p\tau}f_1(\tau)d\tau\int_0^{+\infty}e^{-pt'}f_2(t')\,dt\quad(t-\tau=t')\\&=F_1(p)F_2(p).\end{aligned}$$

这个性质与傅里叶(Fourier)变换中的性质是类似的．

【例 12】 求 $\dfrac{1-\cos\omega t}{\omega^2}$ 的拉普拉斯变换．

解：用卷积的变换求：已知

$$f_1(t)=1\rightarrow\frac{1}{p},\ \operatorname{Re}p>0\ 及\ \frac{\sin\omega t}{\omega}\rightarrow\frac{1}{p^2+\omega^2},$$

$$\operatorname{Re}p>|\operatorname{Im}\omega|.$$

利用上面的卷积性质，得到

$$\int_0^t 1\cdot\frac{\sin\omega\tau}{\omega}d\tau\rightarrow\frac{1}{p(p^2-\omega^2)},\quad\operatorname{Re}p>|\operatorname{Im}\omega|.$$

即

$$\frac{1-\cos\omega t}{\omega^2}\rightarrow\frac{1}{p(p^2+\omega^2)},\quad\operatorname{Re}p>|\operatorname{Im}\omega|.\quad(31)$$

10．象的卷积性质

设 $f_i(t)\rightarrow F_i(p)$，$\operatorname{Re}p>a_i$ $(i=1,2)$，则

$$\begin{aligned}f(t)=f_1(t)f_2(t)\rightarrow F(p)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}F_1(z)F_2(p-z)dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}F_2(z)F_1(p-z)dz,\end{aligned}\quad(32)$$

其中对第一个积分：$b>a_1$，$\mathrm{Re}\,p>b+a_2$；对第二个积分 $b>a_2$，$\mathrm{Re}\,p>b+a_1$.

这个性质将在第四节中得到证明.

习 题 8·3

1. 求下列函数的拉普拉斯变换：

(1) $t^{\alpha}e^{3t}$, $\alpha>-1$;　　(2) $\dfrac{t^2}{2a}\sin at$;

(3) $\dfrac{\cos\alpha t-\cos\beta t}{\beta^2-\alpha^2}$;　　(4) $\dfrac{1-e^{-t}}{t}$.

第四节　拉普拉斯变换的逆变换

在很多问题中，不仅需要知道函数的拉普拉斯变换，而且还需要知道拉普拉斯变换的逆变换，也就是要解决其逆问题：找一个函数 $f(t)$，使得其拉普拉斯变换等于一个满足一些条件的解析函数 $F(p)$. 下面可以看到：在一定条件下，这种函数 $f(t)$ 一定存在且是唯一的.

今后我们认为：函数 $f(t)$ 除了满足第二节中的三个条件以外，而且还是逐段光滑的.

定理 1　设函数 $f(t)$ 的增长性指示数为 a，$f(t)\to F(p)$，则在 $f(t)$ 的连续点上，就有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}F(p)dp\quad t\in(-\infty,\ +\infty),\tag{1}$$

其中 $b>a$，是任意数.

这公式称为梅林(Mellin)公式.

【证】　由于函数 $f(t)$ 的增长性指示数为 a，因此对于任意的数 $b>a$，函数 $\varphi(t)=e^{-bt}f(t)$ 当 $t\to+\infty$ 时，依指数趋向

于零，且仍是逐段光滑的．根据傅里叶变换的理论知道，在 $\varphi(t)$ 的连续点上，它的傅里叶变换后的逆变换一定仍然等于它本身，即

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\eta)e^{i\xi(t-\eta)}d\eta.$$

因而有

$$\begin{aligned}e^{-bt}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-b\eta}f(\eta)e^{i\xi(t-\eta)}d\eta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi t}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(b+i\xi)\eta}f(\eta)d\eta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi t}d\xi\int_{0}^{+\infty}e^{-(b+i\xi)\eta}f(\eta)d\eta,\end{aligned}$$

这里用到，当 $t<0$ 时，$f(t)=0$．在上式中，令 $p=b+i\xi$，$dp=id\xi$，且当 $\xi\in(-\infty,\ +\infty)$ 时，p 在平行于虚轴的直线上从 $b-i\infty$ 变到 $b+i\infty$．因此，由上式得到

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(b+i\xi)t}\,d\xi\int_{0}^{+\infty}e^{-(b+i\xi)\eta}f(\eta)d\eta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(b+i\xi)t}\,F(b+i\xi)d\eta=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}F(p)dp.\quad\blacksquare\end{aligned}$$

根据上述定理 1 及第二节、第三节中所得到的一系列结果，则

由第二节公式(6)就得

$$1=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\,\frac{1}{p}\,dp,\quad b>0,\ t>0.$$

由第二节公式(7)得

$$t=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\,\frac{1}{p^2}\,dp,\quad b>0,\ t>0.$$

由第二节公式(11)，对任意自然数 n，得

$$\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\,\frac{1}{p^{n+1}}\,dp,\quad b>0,\ t>0.$$

由第二节公式(12)得到

$$t^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}dp,\quad b>0,\ t>0.$$

由第二节公式(10)，当 $\nu>-1$ 时，得到

$$t^{\nu}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}dp,\quad b>0,\ t>0.$$

由第三节公式(14)得

$$e^{at}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\frac{1}{p-a}dp,\quad b>\operatorname{Re}a,\ t>0.$$

由第三节公式(3)得

$$\sin\omega t=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}dp,\quad b>|\operatorname{Im}\omega|,\ t>0.$$

由第三节公式(4)得

$$\cos\omega t=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\frac{p}{p^2+\omega^2}dp,\quad b>|\operatorname{Im}\omega|,\ t>0.$$

由第三节公式(10)得

$$|\sin\omega t|=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\operatorname{cth}\frac{p\pi}{2\omega}dp,$$
$$b>|\operatorname{Im}\omega|,\ t>0.$$

由第三节公式(17)得

$$\frac{t^n}{n!}e^{at}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\frac{1}{(p-a)^{n+1}}dp,\quad b>\operatorname{Re}a,\ t>0.$$

由第三节公式(19)得

$$e^{at}\sin\omega t=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}dp,$$
$$b>|\operatorname{Im}\omega|+\operatorname{Re}a,\ t>0.$$

由第三节公式(20)得

$$e^{at}\cos\omega t=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}dp,$$
$$b>|\operatorname{Im}\omega|+\operatorname{Re}a,\ t>0.$$

由第三节公式(15)得

$$\frac{1-\cos\omega t}{\omega}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)p}dp,$$

$$b>|\operatorname{Im}\omega|,\ t>0.$$

由第三节公式(23)得

$$t\sin\omega t=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}dp,$$

$$b>|\operatorname{Im}\omega|,\ t>0.$$

由第三节公式(24)得

$$t\cos\omega t=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}dp,\quad b>|\operatorname{Im}\omega|,t>0.$$

由第三节公式(27)得

$$\frac{\sin\omega t}{t}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{p}{\omega}\right)dp,$$

$$b>|\operatorname{Im}\omega|,\ t>0.$$

由于 $t<0$ 时，$f(t)=0$，故所有上述积分当 $t<0$ 时都为零.

上述所有积分公式也可以用留数定理直接求出来.

现在我们就可以证明第三节末尾部分拉普拉斯变换的性质 10(象的卷积性质)了. 事实上，有

$$f(t)=f_1(t)\cdot f_2(t)\to F(p)$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f_1(t)\cdot f_2(t)dt,\quad \operatorname{Re}p>a_1+a_2.\tag{2}$$

对于 $f_1(t)$，应用本节定理 1 的梅林公式(1)，得到

$$f_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}F_1(p)dp,\quad b>a_1.\tag{3}$$

将(3)代入(2)后，得到

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}f_2(t)\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{zt}F_1(z)dz$$

$$b>a_1,\quad \operatorname{Re} p>a_1+a_2.$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}F_1(z)dz\int_0^{+\infty}e^{-(p-z)t}f_2(t)dt. \tag{4}$$

这里，当 $\operatorname{Re} p>b+a_2$、$b>a_1$ 时，二重积分绝对收敛，因此累次积分交换次序是可行的．这样一来，由(4)就得到

$$F(p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}F_1(z)F_2(p-z)dz,$$

$$\operatorname{Re} p>b+a_2,\ b>a_1.$$

这就是第三节末尾公式(32)中的第一个积分．公式(32)中第二个积分也可以类似地证明．因此象的卷积性质得证．

需要指出：在具体应用第三节拉普拉斯变换的性质 10 (象的卷积性质)时，必须会计算第三节末尾的公式(32)，这往往是通过留数定理来进行计算的．现在举例说明：由第二节公式(7)及第三节公式(3)，应用第三节性质 10，得到

$$t\sin\omega t\to\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{\omega}{z^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{(p-z)^2}dz,$$

$$\operatorname{Re} p>b>|\operatorname{Im}\omega|. \tag{5}$$

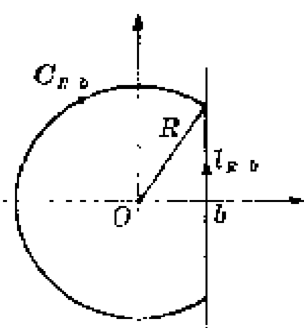


图 8-1

这里被积函数 $G(z)=\dfrac{\omega}{z^2+\omega^2}\cdot\dfrac{1}{(p-z)^2}$ $(\operatorname{Re} p>b>|\operatorname{Im}\omega|)$ 在 $\operatorname{Re} z<b$ 上只有两个一级极点 $z=\pm\omega i$．为了求出积分(5)，考虑闭路 Γ_{Rb}，它是由 $\operatorname{Re} z=b$ 被 $|z|=R$ 所截出的线段 l_{Rb} 及 $|z|=R$ 上的大半个圆周 C_{Rb} 所组成(见图 8-1)．因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{Rb}}G(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_{Rb}}G(z)dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{Rb}}G(z)dz. \tag{6}$$

用第五章第二节中引理1的证明方法，由$|G(z)| \leqslant O\left(\frac{1}{|z|^4}\right)$可以证明

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R b}} G(z)dz=0. \tag{7}$$

应用第五章第一节中的留数定理，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{Rb}} G(z)dz &= \operatorname*{Res}_{z=\omega i} G(z)+\operatorname*{Res}_{z=-\omega i} G(z)\\ &=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{(p-\omega i)^2}-\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{(p+\omega i)^2}\\ &=\frac{1}{2i}\cdot\frac{(p+\omega i)^2-(p-\omega i)^2}{(p^2+\omega^2)^2}=\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}.\end{aligned} \tag{8}$$

由此，根据公式(5)，并注意到公式(6)～(8)，当$R\to+\infty$后，又得到

$$t\sin\omega t\to\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2},\quad \operatorname{Re}p>|\operatorname{Im}\omega|.$$

下面的定理是研究拉普拉斯变换的逆问题，即研究是否存在一个函数$f(t)$，使得$f(t)$的拉普拉斯变换等于一个预先给定的、在半平面上的解析函数$F(p)$.

定理2 设函数$F(p)$满足下列条件：

1) $F(p)$在$\operatorname{Re}p>a$上解析；

2) 在$\operatorname{Re}p\geqslant b>a$上，$\lim\limits_{|p|\to+\infty}F(p)$对于$\arg p$一致趋于零；

3) 对于所有的$b>a$，存在积分

$$\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}|F(p)|dp=\lim_{A\to+\infty}\int_{b-iA}^{b+iA}|F(p)|dp=M_b$$

$$(M_b\text{是常数}), \tag{9}$$

则对任意的$b>a$，有函数

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}F(p)dp\quad(b>a,\ t>a) \tag{10}$$

存在且不依赖于 b，其中积分是按公式(9)中的极限意义下来理解的，它满足第二节中的三个条件，其增长性指示数$\leqslant a$，且 $f(t)\to F(p)$.

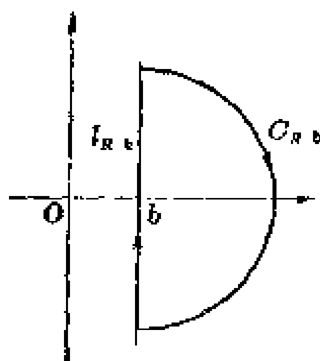


图 8-2

【证】 当 $t<0$ 时，先证明 $f(t)=0$. 首先我们构造一条闭路 Γ_{Rb}: 它是由 $\mathrm{Re}\,z=b$ 被 $|p-b|=R$ 所截出的线段 l_{Rb} 及 $|p-b|=R$ 上的右半圆周 C_{Rb} 所构成的(见图8-2). 由于函数$e^{pt}F(p)(t<0)$在 Γ_{Rb} 及其内部解析，因此由第三章第二节中的柯西定理得到

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{Rb}}e^{pt}F(p)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_{Rb}}e^{pt}F(p)dp+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{Rb}}e^{pt}F(p)dp. \tag{11}$$

注意到 $t<0$ 以及本定理的条件 2)，如同证明第五章第二节中的约当引理一样，可以得到

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{Rb}}e^{pt}F(p)dp=0. \tag{12}$$

由(11)及(12)并注意到(10)，就得到当 $t<0$ 时，$f(t)=0$.

此外，由于本定理条件 3，当 $t>0$ 时，对任意的 $b>a$，有

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}F(p)\,dp\right|\leqslant\frac{e^{bt}}{2\pi}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}|F(p)|\,|dp|$$

$$=\frac{M_b}{2\pi}e^{bt}.$$

因此 $f(t)$ 满足第二节中的条件 3)，且增长性指示数 $\leqslant a$. 至于第二节中的条件 1)，是显然满足的. 因为积分(10)中的被积函数关于 t 连续，且由于本定理的条件 3)，它在 $t\geqslant0$ 上内闭一致收敛，因此应用第一节中定理 1，知道 $f(t)$ 是 $t\geqslant0$ 上的连续函数. 这样一来，函数 $f(t)$ 就满足第二节中的三个条

件了.

现在证明积分(10)不依赖于$b>a$. 为此,考虑任意两个数b_1与b_2 ($b_2>b_1>a$). 设Γ_A是区域$\mathrm{Re}\,p>a$上的闭路,它是由平行于虚轴的线段$[b_1-iA,\ b_1+iA]$、$[b_2-iA,\ b_2+iA]$及平行实轴的线段$[b_1-iA,\ b_2-iA]$、$[b_1+iA,\ b_2+iA]$按逆时针方向所组成的(见图 8-3). 利用第三章第二节中的柯西定理得到

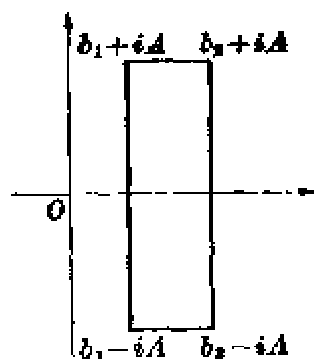


图 8-3

$$0=\int_{\Gamma_A}e^{pt}F(p)\,dp=\int_{b_2-iA}^{b_2+iA}-\int_{b_1+iA}^{b_2+iA}-\int_{b_1-iA}^{b_1+iA}-\int_{b_1-iA}^{b_2-iA}$$
$$=I_1+I_2+I_3+I_4. \tag{13}$$

对于I_2,由于本定理的条件 2),任给$\varepsilon>0$,存在数A_1,当$A>A_1$时,有$|F(\xi+iA)|<\varepsilon$,因此当$A>A_1$时,有

$$|I_2|\leqslant\varepsilon\int_{b_1}^{b_2}\left|e^{(\xi+iA)t}\right|\,d\xi=\frac{\varepsilon}{t}(e^{b_2t}-e^{b_1t})$$

即
$$\lim_{A\to+\infty}I_2=0.$$

同样可证
$$\lim_{A\to+\infty}I_4=0.$$

因而在(13)中,令$A\to+\infty$,就得到

$$\int_{b_2-i\infty}^{b_2+i\infty}e^{pt}F(p)\,dp=\int_{b_1-i\infty}^{b_1+i\infty}e^{pt}F(p)dp.$$

由于b_1与b_2的任意性,$b_1>b_2>a$,这就证明了(10)不依赖于$b>a$.

现在证明$f(t)\to F(p)$, $\mathrm{Re}\,p>a$. 为此,对于任意的p_0 ($\mathrm{Re}\,p_0>a$),由(10)可得到

$$\int_0^{+\infty}e^{-p_0t}f(t)dt=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty}e^{-p_0t}dt\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}F(p)dp \quad (b>a).$$

这里可以取 b 满足 $a<b<\operatorname{Re} p_0$. 注意到定理的条件 2), 上述函数 $e^{-p_0t}e^{pt}F(p)$ 的二重积分绝对收敛, 因此可以对累次积分交换次序, 这样, 由上式就得到

$$\int_0^{+\infty} e^{p_0t} f(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(p)dp \int_0^{+\infty} e^{-(p_0-p)t}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{F(p)}{p-p_0}dp. \qquad (14)$$

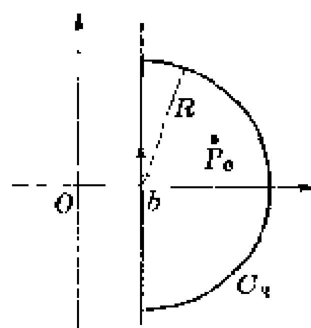


图 8-4

考虑闭路 Γ_R, 它是由 $\operatorname{Re} p=b$ 上的线段 $[b-iR, b+iR]$ 及 $|p-b|=R$ 上的右半个圆周 C_R 按顺时针方向组成的 (见图 8-4). 当 R 充分大时, Γ_R 内部就包有 $p=p_0$. 由于函数 $F(p)$ 在 Γ_R 上及其内部解析, 因此应用第三章第四节中的柯西公式, 就得到

$$F(p_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F(p)}{p_0-p}dp$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iR}^{b+iR}\frac{F(p)}{p_0-p}dp + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{F(p)}{p_0-p}dp \qquad (15)$$

由于本定理的条件 2), 如同在第五章第二节中证明引理时一样, 可以得到

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{F(p)}{p_0-p}dp = 0. \qquad (16)$$

因而由(14)并注意到(15)及(16), 令 $R\to+\infty$, 就得

$$\int_0^{+\infty} e^{-p_0t}f(t)dt = F(p_0). \ \blacksquare$$

注 由定理 1 可以看出: 对于定理 2 中的函数 $F(p)$ 而言, 只存在一个满足第一节中三个条件的函数 $f(t)$, 使得 $f(t)\to F(p)$.

事实上, 若有函数 $f_1(t)\to F(p)$, 则由定理 1 知道, 就有

$$f_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}F(p)dp \quad (b>a).$$

定理 2 有很多应用，下面举例说明：

【例 1】 求函数 $F(p)=\frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}(\alpha>0, \mathrm{Re}\,p>0)$的原象.

解：这里规定$\sqrt{p}$是 p 在正实轴上 ($p=x>0$)，取值为$\sqrt{x}$的一个分支，因此它在全平面上除了负实轴以外解析.

显然，函数 $F(p)$满足定理 2 中的前两个条件，且 $a=0$. 至于第三个条件，对于任意的 $b>0$，有

$$\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}|F(p)|\,|dp|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|b+iy|}e^{-\alpha|b+iy|^{1/2}\cos\frac{\pi}{4}}dy$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{b^2+y^2}}e^{-\alpha\frac{|y|}{\sqrt{2}}}dy<+\infty.$$

因此，$F(p)$ 满足定理 2 的全部条件. 应用定理 2，就得到 $F(p)$的原象为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}dy \quad (b>0,\ t>0). \tag{17}$$

为了计算积分(17)，在 $t>0$ 时，考虑闭路 Γ_{Rr}，它是由 $\mathrm{Re}\,p=b$ 上被$|p-b|=R$截出的一段 l_R、负实轴上的线段 $[-R, -r]$的上下两沿、小圆$|z|=r$ 以及在半平面 $\mathrm{Re}\,z\leqslant b$ 上的左半个大圆周 C_R: $|p-b|=R$ 按逆时针方向绕行而组成的（见图 8-5）. 函数$\sqrt{p}$，当 p 在$[-R, -r]$的上沿时取值为$|p|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}}=i|p|^{\frac{1}{2}}$；而当 p 在 $[-R, -r]$ 的下沿时，取值为$|p|^{\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i|p|^{\frac{1}{2}}$. 因而，由第三章第二节的柯西定理，得到

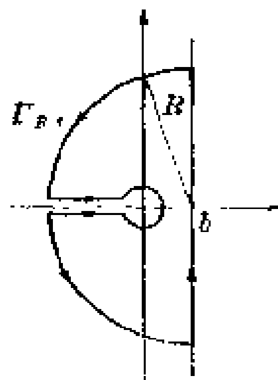


图 8-5

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{Rr}} e^{pt}\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}dp$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iR}^{b+iR}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{-r}e^{xt}\frac{e^{-\alpha i|x|^{1/2}}}{x}dx$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-r}^{-R}e^{xt}\frac{e^{\alpha i|x|^{1/2}}}{x}dx. \tag{18}$$

由于当 $t>0$, 在 $|p-b|=R$ 上有

$$\left|\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}\right|\leqslant\frac{e^{-\alpha\sqrt{b^2+2Rb\cos\theta+R^2}}}{R-b}\leqslant\frac{e^{-\alpha\sqrt{R^2-2Rb}}}{R-b}\to 0.$$

因此类似于第五章第二节中的引理 1, 可得到

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{pt}\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}dp=0. \tag{19}$$

由于 $\lim\limits_{p\to 0} e^{-\alpha\sqrt{p}}e^{pt}=1$, 因此得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} e^{pt}\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}dp$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{1+o(1)}{p}dp=\frac{1}{2\pi i}(1+o(1))\int_{\pi}^{-\pi}\frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta,$$

即

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} e^{pt}\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}dp=-1. \tag{20}$$

这样一来,从(18)～(20), 令 $r\to 0$, $R\to+\infty$, 就得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{pt}\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}dp$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}}\int_r^R\frac{e^{-xt}}{x}\left(e^{-i\alpha\sqrt{x}}-e^{i\alpha\sqrt{x}}\right)dx+1$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin\alpha\sqrt{x}}{x}dx+1$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\frac{\sin\alpha u}{u}du+1 \quad (令\sqrt{x}=u)$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\left[\int_0^{\alpha}\cos us\,ds\right]du+1$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^\alpha\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\cos su\,du\,ds+1. \tag{21}$$

由第五章第一节例5知

$$\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\cos su\,du=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{s^2}{4t}}. \tag{22}$$

因而,从(17)并注意到(21)及(22),就有

$$f(t)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{4t}}\int_0^\alpha e^{-\frac{s^2}{4t}}ds=1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)\quad(t>0), \tag{23}$$

其中最后一个等式是作变换$\frac{s}{\sqrt{4t}}=\eta$以及利用

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\eta^2}d\eta \tag{24}$$

后得到的. 因此,最后得到

$$1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)\to\frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}\quad(p>0). \tag{25}$$

如果函数$F(p)$在$z=\infty$的邻域中解析,则其原象$f(t)$就可以很简单地求出来. 这有下面的定理:

定理3 设函数$F(p)$在$p=\infty$的邻域中有罗朗展开式

$$F(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{p^n},\ |p|>R\quad(R\text{为某个常数}), \tag{26}$$

则它必是函数

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \sum_{n=0}^{\infty}C_{n+1}\frac{t^n}{n!}, & t>0\end{cases} \tag{27}$$

的拉普拉斯变换,且函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+1}\frac{z^n}{n!} \tag{28}$$

是全平面上的解析函数.

【证】 由第四章第三节的罗朗展开式知道,$F(p)$的系数

C_n 有积分表示式

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R_1>R}F(p)p^{n-1}dp \quad (n=1,\ 2,\ \cdots). \tag{29}$$

这里要对系数 C_n 进行估计. 为此, 首先从(26)可以得到 $F(p)=\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{p^{n-1}}$, 这里级数在 $|p|=R_1>R$ 上收敛, 因此在 $|z|=R_1$ 上, $|F(p)|\leqslant\frac{M_{R_1}}{R_1}$, 其中 M_{R_1} 为依赖于 R_1 的常数, 这样, 从(29)就得到

$$\begin{aligned}|C_n|&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R_1}|F(p)|\,|p|^{n-1}|dp|\\&\leqslant M_{R_1}R_1^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots).\end{aligned} \tag{30}$$

由(30)推出: 级数(28)在全平面上绝对收敛, 且有估计式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|C_{n+1}\frac{z^n}{n!}\right|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M_{R_1}R_1^n|z|^n}{n!}=M_{R_1}e^{R_1|z|}. \tag{31}$$

因而函数 $f(z)$ 是全平面上的解析函数, 且 $f(t)$ 的增长性指示数 $\leqslant R$.

当 $\mathrm{Re}\,p>R$ 时, 可以找到 R_1, 使得 $\mathrm{Re}\,p>R_1>R$, 因此

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt&=\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-pt}\left(f(t)-\sum_{n=0}^{N}C_{n+1}\frac{t^n}{n!}\right)dt\\&\quad+\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sum_{n=0}^{N}C_{n+1}\frac{t^n}{n!}dt\\&=\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-pt}\left(f(t)-\sum_{n=0}^{N}C_{n+1}\frac{t^n}{n!}\right)dt+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{n+1}}{p^{n+1}}.\end{aligned} \tag{32}$$

从估计式(31)得到

$$\left|f(t)-\sum_{n=0}^{N}C_{n+1}\frac{t^n}{n!}\right|\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|C_{n+1}\frac{t^n}{n!}\right|\leqslant M_{R_1}e^{R_1|t|}.$$

因此, 任给 $\varepsilon>0$, 存在数 A, 使得对于所有的 N, 有

$$\left|\int_A^{+\infty} e^{-pt}\left(f(t)-\sum_{n=0}^{N} C_{n+1}\frac{t^n}{n!}\right)dt\right| \leqslant M_{R_1}\int_A^{+\infty} e^{R_1 t}e^{-(\operatorname{Re} p)t}dt$$

$$=\frac{M_{R_1}}{\operatorname{Re} p-R_1}e^{-(\operatorname{Re} p-R_1)A}<\varepsilon. \tag{33}$$

对于这样固定的 A, 由于幂级数(28)在$[0, A]$上的一致收敛性, 因此存在 N_1, 当 $N>N_1$ 时, 有

$$\left|\int_0^{A} e^{-pt}\left(f(t)-\sum_{n=0}^{N} C_{n+1}\frac{t^n}{n!}\right)dt\right|<\varepsilon. \tag{34}$$

这样一来, 从(33)及(34), 得到

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\left(f(t)-\sum_{n=0}^{N} C_{n+1}\frac{t^n}{n!}\right)dt=0. \tag{35}$$

比较(32)、(35)及(26), 就得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt=F(p), \quad \operatorname{Re} p>R. \blacksquare$$

【例 2】 求 $F(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ 的拉普拉斯变换的原象.

解: 函数 $F(p)$在全平面上除去连接 $p=i$ 及 $p=-i$ 的线段外单值解析, 且认为 $p>1$ 时, $F(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ 取正实值的一个分支. 此外, $F(p)$在$|p|>1$上解析, $F(\infty)=0$, 因此它满足定理 5 的条件. 利用二项式展开, 得

$$F(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{1}{p\sqrt{1+\dfrac{1}{p^2}}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{1}{p^{2k+1}}, \quad |p|>1. \tag{36}$$

利用定理 5, 就得到 $F(p)$的原象为

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}=J_0(t).$$

这是零级贝塞耳(Besel)函数. 因此有

$$J_0(t)\to\frac{1}{\sqrt{p^2+1}},\quad \mathrm{Re}\,p>1. \tag{37}$$

下面研究有理函数 $R(p)$ 的拉普拉斯变换的原象，这在今后解微分方程时会经常用到.

定理 4 设有理函数 $R(p)$ 有表示式

$$R(p)=\frac{S(p)}{Q(p)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{p-p_k}, \tag{38}$$

其中 $S(p)$ 与 $Q(p)$ 是互质的多项式，$p_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 是分母 $Q(p)$ 不相同的零点，则其拉普拉斯变换的原象为

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{S(p_k)}{Q'(p_k)}e^{p_kt}. \tag{39}$$

【证】 首先，由等式(38)可以得到

$$\begin{aligned}A_k&=\lim_{p\to p_k}(p-p_k)\frac{S(p)}{Q(p)}\\&=\lim_{p\to p_k}\frac{S(p)}{\dfrac{Q(p)-Q(p_k)}{p-p_k}}=\frac{S(p_k)}{Q'(p_k)}.\end{aligned} \tag{40}$$

再由已知公式 $$e^{p_kt}\to\frac{1}{p-p_k},$$

根据第二节中的性质 1(线性性质)，由(40)即得到公式(39). ▌

这个定理也可用梅林公式直接得到，留给读者自己证明.

如果有理函数的分母有重根，则情况就复杂些了.

定理 5 设有理函数 $R(p)=\dfrac{S(p)}{Q(p)}$ 的分母 $Q(p)$ 有形式

$$Q(p)=a_0\prod_{k=1}^{m}(p-p_k)^{\alpha_k},$$

其中 a_0 是常数，p_k 各不相同$(1\leqslant k\leqslant m)$，$\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k=n$，$S(p)$ 也是多项式，它与多项式 $Q(p)$ 没有公共因子，则函数 $R(p)$ 的

拉普拉斯变换的原象为

$$f(t)=\sum_{k=1}^{m} q_k(t)e^{p_k t}, \tag{41}$$

其中

$$q_k(t)=b_{0,k}+b_{1,k}\frac{t}{1}+b_{2,k}\frac{t^2}{2!}+\cdots+b_{\alpha_k-1,k}\frac{t^{\alpha_k-1}}{(\alpha_k-1)!}, \tag{42}$$

而

$$b_{j,k}=\frac{1}{(\alpha_k-1-j)!}\cdot\frac{d^{\alpha_k-1-j}}{dp^{\alpha_k-1-j}}\left[\frac{S(p)}{a_0\prod\limits_{\substack{s=1\\s\neq k}}^{m}(p-p_s)^{\alpha_s}}\right]\Bigg|_{p=p_k}$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ \alpha_k-1). \tag{43}$$

【证】 根据定理的条件，函数 $R(p)$ 有下列部分分式展开

$$R(p)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{\alpha_k-1}\frac{b_{j,k}}{(p-p_k)^{j+1}}. \tag{44}$$

为了求出 $b_{j,k}$，在等式(44)的两边乘 $(p-p_k)^{\alpha_k}$，得到

$$\frac{S(p)}{a_0\prod\limits_{\substack{s=1\\s\neq k}}^{m}(p-p_s)^{\alpha_s}}=\sum_{s=1}^{m}\sum_{l=}^{\alpha_k-1}\frac{b_{l,s}}{(p-p_s)^{l+1}}(p-p_k)^{\alpha_k}. \tag{45}$$

显然，当 $s\neq k$ 时，$\frac{1}{(p-p_s)^{l+1}}(p-p_k)^{\alpha_k}$ $(l=0,\ 1,\ \cdots,\ \alpha_s-1)$ 对 p 求任意 j 次导数 $(0\leqslant j\leqslant\alpha_k-1)$，当 $p\to p_k$ 时的极限值为零. 当 $s=k$ 时，$\frac{1}{(p-p_k)^{l+1}}(p-p_k)^{\alpha_k}=(p-p_k)^{\alpha_k-1-l}$ $(0\leqslant l\leqslant\alpha_k-1)$，在求得 $\alpha_k-(j+1)$ 级导数后，当 $j>l$ 时，还有因子 $(p-p_k)$；而当 $j<l$ 时，显然导数为零. 因此在这两种情况下，当 $p\to p_k$ 时的极限值都为零. 当 $j=l$ 时，得到的导数值为 $(\alpha_k-(l+1))!$. 这样一来，对等式(45)的两边求 $\alpha_k-(j+1)$ 级导数后，再令 $p\to p_k$，就得到 $b_{j,k}$ 的表示式(44).

此外，由第二节的公式(11)及第三节的性质 6（象的延迟

性质)，得到

$$\frac{t^j}{j!} \to \frac{1}{p^{j+1}} \text{ 及 } \frac{t^j}{j!} e^{p_k t} \to \frac{1}{(p-p_k)^{j+1}}. \tag{46}$$

由此从 (46) 与 (44) 并利用第三节的性质 1 (线性性质) 即得到

$$R(p) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{\alpha_k - 1} b_{jk} \frac{t^j}{j!} e^{p_k t}.$$

此即公式(41). ▌

【例 3】 求函数 $R(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ 的拉普拉斯变换的原象.

解: 由于函数 $R(p)$ 以 $p = \pm \omega i$ 为一级极点, 因此应用公式(39), 就得到

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)'}\bigg|_{p=\omega i} e^{i\omega t} + \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)'}\bigg|_{p=-\omega i} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{\omega}{2\omega i} e^{i\omega t} - \frac{\omega}{2\omega i} e^{-i\omega t} = \sin \omega t. \end{aligned}$$

习 题 8·4

1. 求下列函数的拉普拉斯变换的原象:

(1) $\frac{1}{\sqrt{p^2 - a^2}}$;　　(2) $\frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}}$;

(3) $\frac{15p^2 - 13p - 36}{p(p+2)(p-3)}$;　　(4) $\frac{2p^3 + p^2 - 2p + 2}{p^5 + 2p^4 + 2p^3}$.

2. 试利用定理 3 证明定理 4.

第五节 拉普拉斯变换公式表

这一节中把常用的拉普拉斯变换公式收集在一起, 以便查阅, 其中的大部分是已证明过的.

编号	原象	象
1.	1	$\frac{1}{p}$, $\quad \mathrm{Re}\, p>0$
2.	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$, $\quad \mathrm{Re}\, p>0$
3.	$\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}$, $\quad \mathrm{Re}\, p>0$
4.	$\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}$, $\quad \mathrm{Re}\, p>0$
5.	$\frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}, \nu>-1$	$\frac{1}{p^{\nu+1}}$, $\quad \mathrm{Re}\, p>0$
6.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\quad \mathrm{Re}\, p>\lvert\mathrm{Im}\, \omega\rvert$
7.	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$, $\quad \mathrm{Re}\, p>\lvert\mathrm{Im}\, \omega\rvert$
8.	$\lvert\sin \omega t\rvert$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \mathrm{cth} \frac{p\pi}{2\omega}$, $\quad \mathrm{Re}\, p>\lvert\mathrm{Im}\, \omega\rvert$
9.	$\mathrm{sh}\, \lambda t$	$\frac{\lambda}{p^2-\lambda^2}$, $\quad \mathrm{Re}\, p>\lvert\mathrm{Re}\, \lambda\rvert$

编号	原象	象
10.	$\operatorname{ch}\lambda t$	$\dfrac{p}{p^2-\lambda^2}$, $\quad \operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Re}\lambda \rvert$
11.	$\dfrac{t^n}{n!}e^{at}$	$\dfrac{1}{(p-a)^{n+1}}$, $\quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$
12.	$\dfrac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)}e^{at}$	$\dfrac{1}{(p-a)^{\nu+1}}$, $\quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$
13.	$\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$, $\quad \operatorname{Re} p > \max(\operatorname{Re} a,\ \operatorname{Re} b)$
14.	$-\dfrac{(a_2-a_3)e^{a_1t}+(a_3-a_1)e^{a_2t}+(a_1-a_2)e^{a_3t}}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)}$	$\dfrac{1}{(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)}$, $\quad \operatorname{Re} p > \max(\operatorname{Re} a_1,\ \operatorname{Re} a_2,\ \operatorname{Re} a_3)$
15.	$e^{bt}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-b)^2+\omega^2}$, $\quad \operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im}\omega \rvert + \operatorname{Re} b$
16.	$e^{bt}\cos\omega t$	$\dfrac{p-b}{(p-b)^2+\omega^2}$, $\quad \operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im}\omega \rvert + \operatorname{Re} b$
17.	$\dfrac{1-\cos\omega t}{\omega}$	$\dfrac{\omega}{(p^2+\omega^2)p}$, $\quad \operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im}\omega \rvert$

编号	原象	象
18.	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$, $\operatorname{Re} p>\lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$
19.	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$, $\operatorname{Re} p>\lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$
20.	$\dfrac{\sin\omega t}{t}$	$\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{p}{\omega}$, $\operatorname{Re} p>\lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$
21.	$\operatorname{si} t-\int_0^t \dfrac{\sin t}{t}dt$	$\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{p}{\omega}\right)$, $\operatorname{Re} p>0$
22.	$\dfrac{\cos at-\cos bt}{b^2-a^2}$	$\dfrac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$, $\operatorname{Re} p>\max(\lvert\operatorname{Im} a\rvert, \lvert\operatorname{Im} b\rvert)$
23.	$\dfrac{1}{a^2}\sin\dfrac{at}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\dfrac{at}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{p}{p^4+a^4}$, $\operatorname{Re} p>\max\left(\dfrac{\lvert\operatorname{Re} a\rvert}{\sqrt{2}}, \dfrac{\lvert\operatorname{Im} a\rvert}{\sqrt{2}}\right)$
24.	$\cos\dfrac{at}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\dfrac{at}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{p^3}{p^4+a^4}$, $\operatorname{Re} p>\max\left(\dfrac{\lvert\operatorname{Re} a\rvert}{\sqrt{2}}, \dfrac{\lvert\operatorname{Im} a\rvert}{\sqrt{2}}\right)$
25.	$1+e^t\Phi(\sqrt{t}-1)$	$\dfrac{1}{p(1+\sqrt{p})}$, $\operatorname{Re} p>0$

编号	原象	象	
26.	$e^t(1-\Phi(\sqrt{t}))$	$\frac{\sqrt{p}}{p(1+\sqrt{p})}$,	$\mathrm{Re}\,p>0$
27.	$\Phi(\sqrt{at})$, $a>0$	$\frac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}$,	$\mathrm{Re}\,p>a$
28.	$1-\Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$, $a>0$	$\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}$,	$\mathrm{Re}\,p>0$
29.	$J_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$,	$\mathrm{Re}\,p>1$
30.	$J_0(2\sqrt{t})$	$\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}$,	$\mathrm{Re}\,p>0$
31.	$J_n(t)$（见本章复习讨论题7）	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$,	$\mathrm{Re}\,p>1$
32.	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$,	$\mathrm{Re}\,p>-\mathrm{Re}\,a$
33.	$\frac{e^{-2a\sqrt{t}}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{a^2}{p}}\left(1-\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{p}}\right)\right)$,	$\mathrm{Re}\,p>0$
34.	$e^{-a^2t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{p^2}{4a^2}}\left(1-\Phi\left(\frac{p}{a}\right)\right)$,	$\mathrm{Re}\,p>0$

习 题 8·5

1. 试证明拉普拉斯变换公式表中编号为23、24、30、32的公式.

第六节 拉普拉斯变换在解微分方程中的应用

6.1 用拉普拉斯变换解常微分方程

1. 常系数非齐次微分方程及齐次初值问题

考虑常系数非齐次 n 阶常微分方程

$$a_0y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}y'(t)+a_ny(t)=g(t)^{*)} \tag{1}$$

及零初始条件

$$y(0)=y'(0)=\cdots=y^{(n-1)}(0)=0. \tag{2}$$

设 $y(t)\to Y(p)$, $g(t)\to G(p)$, 由于初始条件(2), 应用第二节中的拉普拉斯变换的性质4(导数性质), 得到

$$y^{(s)}(t)\to p^sY(p) \quad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{3}$$

由此, 对方程(1)的两边实行拉普拉斯变换后, 得到

$$a_0p^nY(p)+a_1p^{n-1}Y(p)+\cdots+a_nY(p)=G(p),$$

即

$$Y(p)=\frac{G(p)}{Q_n(p)}, \tag{4}$$

其中

$$Q_n(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n \tag{5}$$

称为常微分方程(1)的特征多项式. 利用梅林公式, 就得到

*) 在实际应用中, 只在有限区间上考虑函数 $g(t)$, 但我们可以认为它在实轴上的其他地方取值为零.

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\frac{G(p)}{Q_n(p)}dp,$$

$$\mathrm{Re}\,p>b\text{ 中没有 }Q_n(p)\text{的零点.}\tag{6}$$

如果改写(4)为$Y(p)=\frac{1}{a_0}\cdot\frac{a_0}{Q_n(p)}G(p)$，则利用拉普拉斯变换的性质9(卷积性质)，即得到$y(t)$的积分表示式

$$y(t)=\frac{1}{90}\int_0^t\varphi_{n-1}(t-\tau)g(\tau)d\tau,\tag{7}$$

其中

$$\varphi_{n-1}(t)\to\frac{a_0}{Q_n(p)}.\tag{8}$$

【例1】 求微分方程

$$y''(t)-3y'(t)+2y(t)=2e^{3t}\tag{9}$$

满足下列初值条件的解

$$y(0)=y'(0)=0.\tag{10}$$

解：设$y(t)\to Y(p)$，利用公式表中的$2e^{3t}\to\frac{2}{p-3}$，故将微分方程(9)的两边作拉普拉斯变换后，得到

$$(p^2-3p+2)Y(p)=\frac{2}{p-3},$$

即 $$Y(p)=\frac{2}{(p-1)(p-2)(p-3)}=\frac{1}{p-1}-\frac{2}{p-2}+\frac{1}{p-3}.$$

利用公式(6)，或者直接由$e^{bt}\to\frac{1}{p-b}$，从上式可以得到

$$y(t)=e^t-2e^{2t}+e^{3t}.$$

2. 常系数齐次微分方程及非齐次初值问题

考虑常系数齐次n阶常微分方程

$$a_0y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_ny(t)=0\tag{11}$$

及非齐次初始条件

$$y(0)=y_0,\ y'(0)=y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(0)=y_{n-1}. \tag{12}$$

首先考虑齐次方程的基础解，即研究满足方程(11)及n个不同的初值问题的解：对任何数k $(0\leqslant k\leqslant n-1)$，考虑初值

$$y^{(k)}(0)=1,\ y^{(j)}(0)=0\ (j\neq k,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1). \tag{13}$$

为了求方程(1)及满足初值(13)的解，对方程(11)用拉普拉斯变换：设$y(t)\to Y(p)$，注意到初值(13)，利用第三节中的性质4(导数性质)，就有

$$y^{(j)}(t)\to p^j\left(Y(p)-\frac{\varepsilon_{kj}}{p^{k+1}}\right)\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{14}$$

其中
$$\varepsilon_{kj}=\begin{cases}0, & j\leqslant k;\\ 1, & j>k.\end{cases}$$

由此，将方程(11)的两边实行拉普拉斯变换，注意到(14)，就得到

$$a_0\left[p^n\left(Y(p)-\frac{\varepsilon_{kn}}{p^{k+1}}\right)\right]+a_1\left[p^{n-1}\left(Y(p)-\frac{\varepsilon_{kn-1}}{p^{k+1}}\right)\right]+\cdots$$
$$+a_{n-1}\left[p\left(Y(p)-\frac{\varepsilon_{k1}}{p^{k+1}}\right)\right]+a_nY(p)=0,$$

即
$$(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n)Y(p)$$
$$-\frac{1}{p^{k+1}}(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-(k+1)}p^{k+1})=0,$$

即

$$Y(p)=\frac{\psi_k(p)}{Q_n(p)}, \tag{15}$$

其中，$Q_n(p)$由公式(5)所确定；而

$$\psi_k(p)=a_0p^{n-(k+1)}+a_1p^{n-(k+2)}+\cdots+a_{n-(k+1)}$$
$$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1). \tag{16}$$

下面用$y_k(t)$表示方程(11)满足初值(13)的解，则由梅林公式得到

$$y_k(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}\,\frac{\psi_k(p)}{Q_n(p)}\,dp,\quad b>a.$$

其中 a 使函数 $\frac{\psi_k(p)}{Q_n(p)}$ 在 $\operatorname{Re}p>a$ 上没有极点. 显然, 函数 $\frac{\psi_k(p)}{Q_n(p)}$ 的全部极点都在 $\operatorname{Re}p<b$ 上, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\psi_k(p)}{Q_n(p)}=0$, 因此上面积分中的被积函数满足第五章第二节引理 2 的条件. 应用这个引理即可得到

$$y_k(t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{m}\operatorname*{Res}_{p=p_i}\left(e^{pt}\frac{\psi_k(p)}{Q_n(p)}\right),\tag{17}$$

其中 $p_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 是函数 $Q_n(p)$ 的全部零点. 这里, 应用第四节中的定理 5(更具体地说: 定理中的公式(41)), 也可得到(17), 它是指数函数及多项式乘积的和.

此外, 由于初值条件(13), 其朗斯基行列式不为零:

$$\begin{vmatrix} y_0(0) & y_0'(0) & \cdots & y_0^{(n-1)}(0)\\ y_1(0) & y_1'(0) & \cdots & y_1^{(n-1)}(0)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_{n-1}(0) & y_{n-1}'(0) & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1.$$

由微分方程的理论知道: 解 $y_k(t)$ $(0\leqslant k\leqslant n-1)$ 是线性无关的, 且满足方程(11)及初值问题(12)的解有表示式

$$y(t)=\sum_{k=0}^{n-1}y_k y_k(t).\tag{18}$$

【例 2】 求微分方程

$$y^{(4)}+2y^{(2)}+y=0\tag{19}$$

满足下列初值条件的解

$$y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\ y'''(0)=1. \tag{20}$$

解：应用上面的方法，由于 $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$，因此只要求 $y_3(t)$ 就行了．由公式(5)及(16)得到

$$Q_4(p)=p^4+2p^2+1=(p+i)^2(p-i)^2$$

及

$$\psi_3(p)=1.$$

因此由公式(17)得到

$$\begin{aligned}y_3(t)&=\operatorname*{Res}_{p=i} e^{pt}\frac{\psi_3(p)}{Q_4(p)}+\operatorname*{Res}_{p=-i} e^{pt}\frac{\psi_3(p)}{Q_4(p)}\\&=\operatorname*{Res}_{p=i}\frac{e^{pt}}{(p+i)^2(p-i)^2}+\operatorname*{Res}_{p=-i}\frac{e^{pt}}{(p+i)^2(p-i)^2}.\end{aligned}$$

利用第五章第一节求留数的方法，由于 $p=\pm i$ 都是二级极点，故有

$$\begin{aligned}y_3(t)&=\frac{d}{dp}\left(\frac{e^{pt}}{(p+i)^2}\right)\Bigg|_{p=i}+\frac{d}{dp}\left(\frac{e^{pt}}{(p-i)^2}\right)\Bigg|_{p=-i}\\&=e^{it}\left(\frac{2it-2}{8i^3}\right)+e^{-it}\left(\frac{-2it-2}{(-2i)^3}\right)\\&=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t).\end{aligned}$$

最后，由(18)得到解为

$$y(t)=y_3(t)=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t). \tag{21}$$

3．常系数非齐次方程及一般初值问题

考虑常系数非齐次方程

$$a_0y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}y'(t)+a_ny(t)=g(t) \tag{1}$$

及初值条件

$$y(0)=y_0,\ y'(0)=y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(0)=y_{n-1}. \tag{12}$$

由于方程(1)及初值条件(12)关于 $y(t)$ 都具有线性的特点，因此可以分解为：(一)求非齐次方程(1)及满足齐次初值条件(2)的解；(二)求齐次方程(11)及满足初值条件(12)的

解．然后再将这个解相加，就可以得到方程(1)满足初值条件(12)的解了．

【例 3】 求满足微分方程

$$y''(t)+y(t)=\sin t \tag{22}$$

并满足初值条件的解

$$y(0)=0,\ y'(0)=-\frac{1}{2}. \tag{23}$$

解：先求方程(22)并满足初值条件

$$y(0)=y'(0)=0 \tag{24}$$

的解．设 $y(t)\to Y(p)$，已知 $\sin t\to\dfrac{1}{p^2+1}$，由(22)及(24)，应用公式(4)得到

$$Y(p)=\frac{G(p)}{Q_2(p)}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}=\frac{1}{(p^2+1)^2}.$$

因此，由梅林公式及应用留数定理(参看公式(21))得到

$$y(t)=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t). \tag{25}$$

再考虑齐次方程

$$y''(t)+y(t)=0$$

及初值(23)．由初值(23)并根据公式(18)知道：这只要求出那里的 $y_1(t)$ 就够了．由公式(16)及(5)知，$\psi_1(p)=1$，$Q_2(p)=p^2+1$．因而，应用公式(17)得到

$$y_1(t)=\operatorname*{Res}_{p=i} e^{pt}\frac{1}{p^2+1}+\operatorname*{Res}_{p=-i} e^{pt}\frac{1}{p^2+1}$$

$$=\frac{e^{it}}{2i}-\frac{e^{-it}}{2i}=\sin t.$$

由此，应用(18)得到

$$y(t)=-\frac{1}{2}\sin t. \tag{26}$$

最后，将解(25)与(26)相加，就得到方程(22)满足初值条件(23)的解为

$$y(t)=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)-\frac{1}{2}\sin t=-\frac{1}{2}t\cos t.$$

6.2 用拉普拉斯变换解偏微分方程

这里只以热传导方程为例来说明如何应用拉普拉斯变换的方法来解偏微分方程. 其他的一些方程也可以用类似的方法来求解，这里就不作详细介绍了.

设要在枢轴 $0<x<+\infty$ 上求温度. 如果已知在时间 $t=0$ 的温度恒为零，在枢轴端点 $x=0$ 处有已知的温度 $q(t)$. 在数学上，就是要求出位置为 x、时间为 t 的温度函数 $u(x,t)$，使得满足偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (x>0,\ t>0,\ a>0) \tag{27}$$

及条件

$$u(x,\ 0)=0,\quad u(0,\ t)=q(t). \tag{28}$$

这里设 $q(t)$ 满足第二节中的三个条件，且 $q(t)\to Q(p)$.

设函数 $u(x,\ t)$ 关于 t 的拉普拉斯变换存在且为 $u(x,\ t)\to U(x,\ p)$. 应用第三节中的性质4(导数性质)，注意到初值 $u(x,\ 0)=0$，就有 $\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}\to pU(x,\ p)$. 此外，显然有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\to\frac{\partial^2 U(x,\ p)}{\partial x^2}$. 由此，在方程(27)的两边对自变量 t 的函数(x 看作参变量)应用拉普拉斯变换后就得到

$$pU(x,\ p)-a^2\frac{\partial^2 U(x,\ p)}{\partial x^2}=0. \tag{29}$$

此外对条件(28)的第二式应用拉普拉斯变换后就得到条件

$$U(0,\ p)=Q(p). \tag{30}$$

方程(29)可以看作函数 $U(x, p)$ 关于自变量 x 的常微分方程，其中 p 为参数. 在解这方程时，注意到拉普拉斯变换的性质 $\lim\limits_{p\to+\infty} U(x, p)=0$，由二阶常微分方程求解知道，其解为

$$U(x,p)=Q(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}. \tag{31}$$

由第四节公式(25)，即

$$1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)\to\frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}},$$

可得

$$1-\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\to\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}. \tag{32}$$

如果将公式(31)改写为

$$U(x, p)=Q(p)p\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x},$$

再利用第三节中的性质 4 (导数性质)并注意到公式(32)，就得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(1-\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right)\to p\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}=e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

由 $\Phi(x)$ 的表示式(见第四节的公式(23))及上式，就得到

$$\frac{2x}{a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{t^{\frac{3}{2}}}\to e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}. \tag{33}$$

最后再利用第三节中的性质 9 (卷积性质)并注意到(31)及(33)，就得到

$$u(x, t)=\frac{2x}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}\frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}d\tau.$$

习 题 8·6

1. 用拉普拉斯变换方法解下列满足初值条件的方程:

(1) $x'''(t)+3x''(t)+3x'(t)+x(t)=6e^{-t}, x(0)=x'(0)=x''(0)=0$;

(2) $x''(t)+a^2x(t)=ce^{-bt}$, $x(0)=x'(0)=0$, $a>0$;

(3) $x''(t)+4x'(t)+4x(t)=c\sin\omega t$, $x(0)=x'(0)=0$;

(4) $x''(t)-3x'(t)+2x(t)=12e^{3t}$, $x(0)=2$, $x'(0)=6$;

(5) $x''(t)+4x'(t)=3\sin t+10\cos 3t$, $x(0)=-2$, $x'(0)=3$;

(6) $x''(t)-2x'(t)+2x(t)=2e^t\cos t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

2. 解下面满足初值的微分方程组

$$\begin{cases} x'(t)+x(t)-y(t)=e^t \\ y'(t)+3x(t)-2y(t)=2e^t, \end{cases}$$

初值条件为 $$x(0)=y(0)=0.$$

第八章小结

1. 对于参变量积分，类似于函数项级数，也可以引进收敛、绝对收敛及一致收敛等概念，得到了一致收敛参变量积分的三个重要定理，其中积分的解析性定理在很多问题中有重要的应用.

2. 引进了函数的拉普拉斯变换的概念，指出了在一定的条件下，它在半平面上一致收敛并表示一个解析函数. 拉普拉斯变换有十个重要性质，它们是线性性质、相似性质、延迟性质、导数性质、积分性质、象的延迟性质、象的导数性质、象的积分性质、卷积性质及象的卷积性质.

3. 引进了拉普拉斯变换的逆变换，其中包括将函数表示成为它的拉普拉斯变换的梅林公式及拉普拉斯变换的原象存在性定理. 对于各种特殊函数，给出了拉普拉斯变换原象的求法.

4. 给出了几个重要函数的拉普拉斯变换表.

5. 应用拉普拉斯变换解常系数线性微分方程及偏微分方程，能将解表示为更紧凑的形式，且在某些情况下还可以减

少计算量.

第八章复习讨论题

1. 什么叫做拉普拉斯变换？函数必需满足什么条件，才有拉普拉斯变换？

2. 拉普拉斯变换有哪些重要性质？试各举一例.

3. 求下列函数的拉普拉斯变换:

   (1) $t^2\sin\omega t$;　　　　(2) $t^3\cos\omega t$.

4. 拉普拉斯变换的反变换公式是怎样的？如何应用这个公式来求原象？试就 $F(p)$ 以 $z=\infty$ 为孤立奇点来说明之.

5. 若 $F(p)$ 是有理函数，它的原象有什么特点？

6. 求下列函数的拉普拉斯变换的原象:

   (1) $\dfrac{1}{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}$;　(2) $\dfrac{p}{(p^2+a^2)^2}$.

7. 已知 n 阶贝塞耳函数为

$$J_n(t)=t^n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{2^{2k}k!\,\Gamma(n+k+1)}$$

   及公式 $J_1(t)=-J_0'(t)$, $J_n(t)=J_{n-2}(t)-2J_{n-1}'(t)\,(n=2,3,\cdots)$, 求证:

$$J_n(t)\to\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

8. 求下列微分方程的解:

   (1) $\begin{cases}x''(t)+9x(t)=30\operatorname{ch}t,\\x(0)=3,\ x'(0)=0;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}\dot{x}+2x+2y=10e^{2t},\\\dot{y}-2x+y=7e^{2t},\\x(0)=1,\ y(0)=3.\end{cases}$

第九章

解析函数在流体力学上的应用

前面已经提到，解析函数是大量实际问题的反映．本章从流体力学方面来简单地说明解析函数的作用．

不可压缩流体平面稳定流动

这里考虑的是不可压缩的、密度均匀的流体平行于平面的稳定流动．这种运动的特点是：每一个质点的运动速度都是平行于同一个平面的向量，这个平面就认为是复数平面．所谓不可压缩性就是密度不因压力而改变．例如空气流速不超过声速330米/秒的0.6～0.8倍时，就可以近似地看作不可压缩的．所谓稳定流动，是指每一点(x, y)的运动速度不依赖于时间．这样一来，可以将问题简化．

设D是平面上有流体流动的区域，v_x与v_y分别表示每一点流体运动的速度在x轴及y轴上的两个分量，因此$v=(v_x, v_y)$或$v=v_x+iv_y$就表示每一点上的运动速度．

在区域D内考虑一条闭曲线γ，它的内部也属于区域D．用ds表示曲线γ的弧长S的微分；用dn表示曲线γ的法线方向的微分，且当沿着正方向经过曲线γ时，法线n永远在曲线γ的右边（见图9·1）．

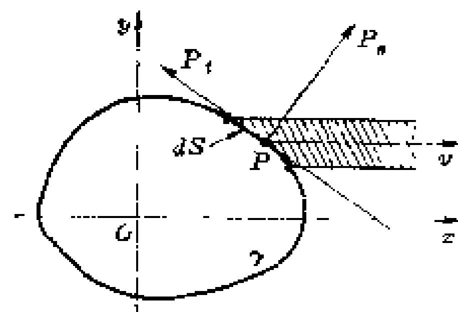


图 9·1

为了方便起见，设流体的

密度为1．我们要求在单位时间内通过曲线γ的流体的流量N．考虑曲线γ上的任意一点$P(x, y)$以及点$P(x, y)$附近的一小段弧．在此弧上，可以近似地认为速度不变．由此看出，在单位时间内，通过弧ds的流体的流量ΔN是近似地以ds以及向量v为边的平行四边形的面积（见图9-1上的阴影部分）．如果用v_n表示速度向量v在法线方向的投影，则得

$$
\begin{aligned}
v_n &= v_x\cos(n, x)+v_y\cos(n, y)\\
&= v_x\sin(t, y)-v_y\cos(t, x)=v_x\frac{dy}{ds}-v_y\frac{dx}{ds},
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

其中t为切线方向．由此得到

$$\Delta N = v_n ds = v_x dy - v_y dx.$$

因而

$$N=\int_\gamma v_n ds=\int_\gamma v_x dy-v_y dx, \qquad (2)$$

其中积分是沿着γ的正方向取的．若$N>0$，则表示流体经过γ流出的量多；若$N<0$，则表示流体经过γ流进的量多；若$N=0$，则表示流体经过γ所流进与流出的量正好相等．

在下面的讨论中，我们认为D是单连通区域，且在此区域中，没有喷出流体的“泉源”，也没有流入流体的“泉汇”（今后通称无“源汇”）．由于流体是不可压缩的，因此对任意一条闭曲线γ而言，$N=0$，即

$$N=\int_\gamma -v_y dx+v_x dy=0.$$

设γ所围的区域为G，因此应用格林公式，得到在任意的区域G上，就有

$$N=\iint_G\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)dxdy=0. \qquad (3)$$

我们可以把G取为以任意一点(x_0, y_0)为中心、半径为r的

圆，在假设 $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ 是连续的情况下，可以得到

$$\lim_{r\to 0}\frac{N}{\pi r^2}=\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\bigg|_{(x_0,\, y_0)}. \tag{4}$$

上式右边称为流体在$(x_0,\ y_0)$处的发散量，记作 $\operatorname{div} v=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}$. 因此，在无“源汇”的条件下，由公式(3)与(4)看出：对于区域 D 内的每一点，有

$$\operatorname{div} v=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \tag{5}$$

现在讨论流体在单位时间内沿着闭曲线 Γ 的环流量：流体的速度 v 在曲线 γ 上的任意点$(x,\ y)$处的切线 t 上的分量 v_t 为

$$v_t=v_x\cos(t,\ x)+v_y\sin(t,\ x)=v_x\frac{dx}{ds}+v_y\frac{dy}{ds}.$$

因此，在单位时间内，流体流过点 P 的法线的流量为 v_t，而经过点 P 附近一小段弧 ds 上的各法线的总流量应该为 $v_t ds=v_x dx+v_y dy$. 这样就得到了流体沿着曲线 γ 的总的环流量为

$$\Gamma=\int_\gamma v_t\,ds=\int_\gamma v_x\,dx+v_y\,dy. \tag{6}$$

如果认为流体在区域 D 中是没有涡旋的，则其环流量 $\Gamma=0$，即在 D 内任意一个闭曲线 γ 上，有

$$\Gamma=\int_\gamma v_x\,dx+v_y\,dy=0.$$

同样，设 γ 所围的区域为 G，应用格林公式得到：对任意的区域 G，就有

$$\Gamma=\iint_G\left(-\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)dx\,dy=0. \tag{7}$$

我们也可以把 G 取为以 D 内的任意一点$(x_0,\ y_0)$为中心、半

径为 r 的圆，在假设 $-\frac{\partial v_x}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ 是连续的条件下，可以得到

$$\lim_{r\to 0}\frac{\Gamma}{\pi r^2}=\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\Bigg|_{(x_0,\, y_0)}. \tag{8}$$

上式右边称为流体在点 (x_0, y_0) 处的旋转量，记作 $\operatorname{rot} v=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}$. 因此，在无"涡旋"的假设下，由公式(7)及(8)看出：对于区域 D 内的每一点，都有

$$\operatorname{rot} v=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0. \tag{9}$$

这样，对于无"源汇"、无"涡旋"的不可压缩流体的稳定流动来说，速度向量 $v=v_x+iv_y$ 必需满足条件(5)及(9). 因此，函数

$$h(z)=v_x-iv_y \tag{10}$$

的实部与虚部就满足了柯西-黎曼方程，它就是 D 内的解析函数了. 我们称它为复速度.

从等式 (5) 还可以看出：$-v_y dx+v_x dy$ 是二元函数 $\psi(x, y)$ 的全微分，即

$$d\psi(x, y)=-v_y dx+v_x dy.$$

由此得

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-v_y,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=v_x. \tag{11}$$

因而

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg/\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{v_y}{v_x}.$$

这说明了：等值线 $\psi(x, y)=C_1$ 上每一点的流体流动的速度 $v=(v_x, v_y)$ 都与等值线 $\psi(x, y)=C_1$ 相切，因此等值线 $\psi(x, y)=C_1$ 就是流体流动的场在无"源汇"时的流线. 函数 $\psi(x, y)$ 称为流函数.

同样，从等式(9)也可以看出，$v_x dx+v_y dy$ 也是某个二元

函数 $\varphi(x, y)$ 的全微分，即

$$d\varphi(x, y) = v_x dx + v_y dy.$$

由此得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_y. \tag{12}$$

从而有

$$\text{grad } \varphi = (v_x, v_y) = v.$$

这表示函数 $\varphi(x, y)$ 是流体流动的势函数，或称位函数，而等值线 $\varphi(x, y) = C_2$ 就是等势线或等位线。

比较(11)与(12)，就可以得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

这就是两个函数 $\varphi(x, y)$ 与 $\psi(x, y)$ 所满足的柯西-黎曼方程。这样，在无"源汇"及无"涡旋"的速度场中，势函数 $\varphi(x, y)$ 及流函数 $\psi(x, y)$ 就是一对共轭调和函数。根据第二章第五节知：复变函数

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \tag{13}$$

就是单连通区域 D 上的解析函数。这个函数就称为刻划流体在区域 D 内流动的复势。

由第二章第二节中的导数公式及这里的公式(11)与(12)得到

$$f'(z) = \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} + i\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x} = v_x - iv_y.$$

这就是复速度，它也是解析函数。因此，如果我们能够求出刻划流体运动的复势，则就可以求出任何点的速度 $v = v_x + iv_y$ 了，且 $v = \overline{f'(z)}$。由于复势是一个解析函数，因此我们就能够利用解析函数理论中的一些工具来解决这个问题了。

此外，显然有

$$I=\int_C f'(z)dz=\int_C (v_x-iv_y)(dx+idy)$$

$$=\int_C v_x dx+v_y dy+i\int_C v_x dy-v_y dx=\Gamma+iN, \qquad (14)$$

其中 C 是 D 内的任意闭曲线.

【例 1】 设平面稳定流动的复势为

$$f(z)=az \quad (a>0).$$

求复速度、流函数及势函数；等势线及流线.

图 9-2

解：由于 $f'(z)=a$，因此任意点的复速度为 a. 此外，因为

$$f(z)=ax+iay,$$

所以流函数为 ay；流线是 $ay=C_1$，即平行于实轴的直线 $y=$常数；势函数为 ax；等势线是 $ax=C_2$，即平行于虚轴的直线 $x=$常数. 这就刻划了流体以等速度 a 从平面的左方流向右方的流动情况（见图 9-2）.

【例 2】 设平面稳定流动的复势为

$$f(z)=\frac{1}{z}.$$

求速度、流函数及势函数；等势线及流线.

解：由于 $f'(z)=-\frac{1}{z^2}$，因而

速度 $v=\overline{f'(z)}=-\frac{1}{\bar{z}^2}=-\frac{z^2}{(z\bar{z})^2}=\frac{y^2-x^2-2i\,xy}{(x^2+y^2)^2}$.

此外 $$f(z)=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

因此流函数为 $-\frac{y}{x^2+y^2}$，流线是 $-\frac{y}{x^2+y^2}=C_1$，它是圆心

在虚轴上经过原点的圆周；势函数为 $\frac{x}{x^2+y^2}$，等势线是 $\frac{x}{x^2+y^2}=C^2$，它是圆心在实轴上经过原点的圆周（参看图 9-3）。

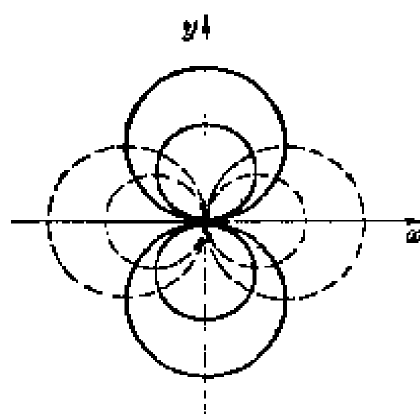


图 9-3

习 题 答 案

第 一 章

习题 1·1 **1**. (1) 模: 2, 幅角: $\frac{\pi}{6}$; (2) 模: 6, 幅角: $\frac{5}{3}\pi$; (3)模: 2, 幅角: $\frac{2}{3}\pi$; (4) 模: $\sqrt{2}$, 幅角: $\frac{5}{4}\pi$; (5) 模: $|b|$, 幅角: 当 $b>0$ 时, $\arg b=\frac{\pi}{2}$; 当 $b<0$ 时, $\arg b=\frac{3}{2}\pi$; 当 $b=0$ 时, 没有幅角; (6) 模: $\sqrt{a^2+b^2}$;

$$\text{幅角: } \arg(a+ib)=\begin{cases} \operatorname{tg}^{-1}\frac{b}{a}, & (a,\ b)\text{在第一象限;} \\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{b}{a}+\pi, & (a,\ b)\text{在第二象限;} \\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{b}{a}+\pi, & (a,\ b)\text{在第三象限;} \\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{b}{a}+2\pi, & (a,\ b)\text{在第四象限.} \end{cases}$$

2. (1) 实部: -3, 虚部: 0, 模: 3, 幅角: π; (2)实部: 0, 虚部: -1, 模: 1, 幅角: $\frac{3}{2}\pi$; (3) 实部: 0, 虚部: -1, 模: 1, 幅角: $\frac{3}{2}\pi$; (4) 实部: $2-2\sqrt{3}$, 虚部: $4+\sqrt{3}$, 模: $\sqrt{35}$, 幅角: $\pi-\operatorname{tg}^{-1}\frac{7+5\sqrt{3}}{4}$; (5) 实部: $-\frac{3}{10}$, 虚部: $\frac{1}{10}$, 模: $\frac{1}{\sqrt{10}}$, 幅角: $\pi-\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{3}$; (6) 实部: $\cos\frac{n\pi}{3}$, 虚部 $\sin\frac{n\pi}{3}$, 模: 1, 幅角: $\frac{n\pi}{3}$. **3**. (1) $2^{\frac{1}{4}}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)}$ $(k=0,\ 1)$; (2) $2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi\right)}$ $(k=0,\ 1,\ 2)$; (3) $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$; (4) $[12(2-\sqrt{3})]^{\frac{1}{12}}e^{i\left(\frac{\pi}{72}+\frac{1}{3}k\pi\right)}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$. **6**. $z_1=1-i$, $z_2=i$.

习题 1·2 **1**. (1) 以 i 为中心, 半径为 2 的圆的内部, 是区域; 以 $-$(1

$+i$)为中心，半径为 1 的圆的外部，是区域；以 -2 为中心，半径为 4 的圆周，不是区域. (2) 以 $z_0=x_0+iy_0$ 为中心，半径为 1 及 2 的同心圆环的内部，是区域； (3) 平行于虚轴的带形集合 $2\leqslant x<3$，$\operatorname{Re} z=x$，不是区域； (4) 虚轴，不是区域； (5) 横坐标小于 2 的半平面，是区域； (6) 抛物线 $y^2<-2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 的内部，是区域，其中 $z=x+iy$； (7) 以焦点为 ± 2，实半轴长为 $\frac{1}{2}$ 的双曲线左边的一支，不是区域，是闭区域； (8) 以焦点为 ± 2，长半轴为 3 的椭圆上及其内部，不是区域，是闭区域； (9) 当 $\lambda=1$ 时，这是连接 z_1 与 z_2 线段的垂直平分线，不是区域；当 $\lambda\neq 1$ 时，这是以 $\frac{z_1-\lambda^2 z_2}{1-\lambda^2}$ 为圆心，半径为 $\left|\frac{\lambda}{\lambda^2-1}\right||z_1-z_2|$ 的圆周，不是区域. (10) 当 $\alpha=\pi$ 时，这是连接 z_1 与 z_2 的线段；当 $\alpha=0$ 时，是连接 z_1 与 z_2 的直线除去线段 $\overline{z_1z_2}$ 后余下的部分；当 $0<\alpha<\pi$ 及 $-\pi<\alpha<0$ 时，分别是经过 z_1 与 z_2 的圆周中的一部分，其对着弦 $\overline{z_1z_2}$ 的圆心角为 $|\alpha|$，都不是区域. **3.** (1) ① $|w|=3$, $0\leqslant\arg w\leqslant\frac{\pi}{3}$, ② $|w|=3$, $0\leqslant\arg w\leqslant\pi$, ③ $|w|=3$, $0\leqslant\arg w\leqslant 2\pi$; (2) ① $|w|=1$, $\arg w$ 从 $0\downarrow-\frac{\pi}{3}$, ② $|w|=1$, $\arg w$ 从 $0\downarrow-\pi$, ③ $|w|=1$, $\arg w$ 从 $0\downarrow-2\pi$; (3) ① $|w|=1$, $\arg w$ 从 $0\uparrow\frac{2\pi}{3}$, ② $|w|=1$, $\arg w$ 从 $0\uparrow 2\pi$, ③ $|w|=1$, $\arg w$ 从 $0\uparrow 4\pi$; (4) ①虚部为 0，实部从 $1\uparrow 3$, ② 虚部为 0，实部从 $1\uparrow 9$, ③虚部为 0，实部从 $1\uparrow 9$, 再从 $9\downarrow 1$. **4.** $\frac{y'(t)}{x'(t)}$.

习题 1.3 **1.** (1) 0; (2) 0; (3) 无极限. **4.** (1)收敛，但不绝对收敛； (2) 收敛且绝对收敛； (3) 收敛且绝对收敛； (4) 不收敛.

第一章复习讨论题 **1.** 模：$\sqrt{2}$，幅角：$\frac{\pi}{4}$，可以表示为 $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}+i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. **3.** 两个复数 $i+e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}$ $(k=0, 1)$.

4. $$\arg z=\begin{cases}\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}, & z\text{ 在第一象限}.\\ \pi+\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}, & z\text{ 在第二象限}.\\ -\pi+\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}, & z\text{ 在第三象限}.\\ \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}, & z\text{ 在第四象限}.\end{cases}$$

5. $|z_0|^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\arg z_0+(2k+1)\pi}{n}\right)}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$.

8. (1) $\dfrac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}+\dfrac{1}{2}$; (2) $\dfrac{\sin\dfrac{n}{2}x\sin\dfrac{1}{2}(n+1)x}{\sin\dfrac{x}{2}}$.

10. 以 z_1 与 z_2 为边的平行四边形的对角线长度的平方和等于四个边长的平方和. **12**. $z=z_1+t(z_2-z_1)$ $(-\infty<t<+\infty)$.

第 二 章

习题 2·1 **1**. (1) 全平面上的连续函数; (2) 全平面上的连续函数; (3) 函数在全平面上除去 $z=2$ 以外连续; (4) 是全平面上除去连接 -2 及 i 的直线段以外的两个连续函数; (5) 是全平面上除去连接 1 与 2 的直线段以外的两个连续函数; (6) 全平面上的三个连续函数. **2**. 当 $x<0$ 时,极限为 0; 当 $x=0$ 时,没有极限; 当 $x>0$ 时,极限为 $+\infty$. **3**. (1) 圆周 $u^2+v^2=\dfrac{1}{4}$; (2) 圆周 $u^2+v^2=u$.

习题 2·2 **1**. (1)在全平面上,导数为 $n(z-1)^{n-1}$; (2) 在 $z\neq\pm1$ 处,导数为 $\dfrac{-2z}{(z^2-1)^2}$; (3) 在 $z\neq-\dfrac{d}{c}$ 处,导数为 $\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$; (4) 在全平面上,导数为 $8z^3(z^2-1)(z^2+1)$; (5) 在 $z\neq-1$, $z\neq\pm i$ 处,导数为 $\dfrac{-2z^3+5z^2+4z+3}{(z+1)^2(z^2+1)^2}$; (6) 处处都没有导数; (7) 在 $z=0$处,导数为 0,其他点上都没有导数.

习题 2·3 **1**. (1) 全平面; (2) 除了 $z=0$ 以外; (3) 到处都不满足; (4) $z=0$ 处; (5) 全平面. **2**. 只有在 $z=0$ 处满足柯西-黎曼条件且有导数,平面上处处不解析. **3**. $n=l=-3$, $m=+1$.

习题2·4 **1**. (1) $\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$ (k 是整数); (2) $i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ (k 是整数). **2**. (1) $\frac{i}{2}(e-e^{-1})$; (2) $\frac{1}{2}(e+e^{-1})$; (3) $\frac{1}{2}[(\sin 1)(e+e^{-1})+i(\cos 1)(e-e^{-1})]$; (4) $\frac{1}{2}[(\cos 1)(e^{-1}+e)+i(\sin 1)(e^{-1}-e)]$; (5) $\frac{i(e-e^{-1})}{e+e^{-1}}$; (6) $\frac{2\sin 2+i(e^2-e^{-2})}{e^2+e^{-2}+2\cos 2}$. **4**. 取 $z=2i$. **6**. (1) $\frac{\pi}{2}+2k\pi-i\ln(\sqrt{2}+1)$ 及 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi-i\ln(\sqrt{2}-1)$ (k 是整数); (2) $2k\pi+i\ln(\sqrt{2}+1)$ 及 $\pi+2k\pi+i\ln(\sqrt{2}-1)$ (k 是整数); (3) 无定义. **7**. $z=k\pi$、$z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 及 $z=k\pi$ (k 是整数).

习题2·5 **1**. (1) iz^3-2+i; (2) $i\left(\frac{1}{z}-1\right)$; (3) $(1-i)z^3+ic$ (c 是任意的实常数).

第二章复习讨论题 **10**. (1) 处处不可微; (2) 只有 $z=0$ 处可微; (3) 处处不可微; (4) 处处可微; (5) 只在直线 $y=x$ 上可微. **17**. (1) $(2k+1)\pi$ (k 是整数); (2) $-\frac{\pi}{4}+k\pi$ (k 是整数). **18**. (1) $e^3(\cos 1+i\sin 1)$; (2) $(\cos 1)\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)+i(\sin 1)\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)$. **25**. (1) $-i(z-1)^2$; (2) $z^2+c(1+i)$ (c 是实常数); (3) $\ln z+ic$ (c 是实常数). **26**. (1) $\frac{1}{z^2}+ic$ (c 是实常数); (2) $i(2\ln z-z^2)+c$ (c 是实常数).

第 三 章

习题3·1 **1**. (1) $1+\frac{i}{2}$; (2) $2+\frac{i}{2}$. **2**. (1) 1; (2) 2. **3**. (1) πi; (2) πi. **4**. (1) $e+e^{-1}$; (2) $\frac{1}{3}(-5+7i)$; (3) $-\frac{2}{3}$. **5**. 曲线两端连线的长度小于弧长.

习题3·2 **1**. 0. **2**. $\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. **3**. (1) (i) $\frac{\pi}{2}$; (ii) $-\frac{\pi}{2}$; (iii) 0;

(2) (i) $\frac{\pi}{16}$; (ii) $-\frac{\pi}{16}$; (iii) 0.

习题3·3 **1.** $\frac{z^{n+1}-z_0^{n+1}}{n+1}$.

习题3·4 **1.** (1) 0; (2) $6\pi i$; (3) $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$; (4) $-\pi e^{-1}$; (5) $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$; (6) 0; (7) 0; (8) 0; (9) πi. **4.** (1) $4\pi i$; (2) 0; (3) 不存在.

第三章复习讨论题 **4.** (1) $2(1-i)$; (2) $2(1+i)$. **5.** (1) $\frac{\sqrt{5}}{2}(2-i)$; (2) 2; (3) $2i$; (4) 0. **6.** (1) $2\pi i$; (2) $2\pi Ri$ **10.** $\frac{\pi i}{2}$. **11.** $\frac{2\pi i}{a}\sin a$. **12.** $\frac{e^{a}}{2}(a+2)$. **13.** (1) 1; (2) $-\frac{e}{2}$; (3) $1-\frac{e}{2}$. **15.** (1) $\frac{2\pi i}{9!}\cos a$; (2) 0.

第　四　章

习题4·1 **2.** 在$|z|<1$及$z=1$处收敛;在$|z|<1$内闭一致收敛. **7.** (1) 1, $|z-3|<1$, $\frac{z-3}{(4-z)^2}$; (2) $+\infty$,全平面; (3) $+\infty$, 全平面; (4) 1, $|z-i|<1$; (5) 1, $|z|<1$; (6) e, $|z|<e$; (7) e, $|z-1|<e$; (8) $+\infty$,全平面; (9) 1, $|z|<1$; (10) $\frac{1}{|a|}$, $|z|<\frac{1}{|a|}$. **9.** (1) R; (2) $\frac{R}{2}$; (3) 当 $R>0$ 时,收敛半径为$+\infty$;当 $R=0$ 时, 有下列各种情况:如果$a_n=n!a^n$,则收敛半径为 $\frac{1}{|a|}$(即可取任何正数); 如果$a_n=(n!)^2$,则收敛半径为0;如果$a_n=(n!)^{\frac{1}{2}}$,则收敛半径为$+\infty$.

习题4.2 **1.** $k\pi$, 是一级零点(k是整数). **2.** 二级零点. **3.** $1-2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$,收敛半径是1; $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{e-1}{2}\right)^{n+1}$, 收敛半径是2. **4.** (1) $\sum_{n=1}^{+\infty}nz^{n-1}$, 收敛半径是1; (2) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}$,收敛半径是2; (3) $\mp i\left(1-\frac{1}{2}z-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2^n n!}z^n\right)$, 收敛半径是1. **5.** (1) $z+\frac{z^3}{3}+\cdots$, 收敛半径是$\frac{\pi}{2}$; (2) $\sin 1+(\cos 1)z+\frac{2\cos 1-\sin 1}{2}z^2+$

$\frac{5\cos 1-6\sin 1}{6}z^3+\cdots$，收敛半径是 1；（3）$\ln 2+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{8}+\cdots$，收敛半径是 π. **6**. (1) $\sum_{m=2}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m-1}\right)\frac{1}{m}z^m$；(2) $\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^{m-1}\frac{2^{2m-1}}{(2m)!}z^{2m}$；(3) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}$. **9**. (1) 不存在；(2) $f(z)=1-\frac{1}{z}$；(3) 不存在. **10**. $\cos\frac{1}{1-z}$，在全平面上除 $z=1$ 以外解析，且有无穷多个零点 $z_k=1-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}$（$k$ 为整数）.

习题 4·3 **1**. (1) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n-2^n}{z^{n+1}}$；(2) 当 $1<|z|<2$ 时，$\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+1}}+\frac{2}{5}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}$；　当 $|z|>2$ 时，$\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^{2n+1}}+\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}+\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$；(3) $-\sum_{n=1}^{+\infty}ni^{n-1}(z-i)^{n-2}$，$0<|z-i|<1$；(4) $1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{6z^3}-\cdots$. **2**. (1) $\frac{1}{a-b}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}\right]$；(2) $\frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n-b^n}{z^{n+1}}$.

习题 4·4 **1**. (1) 本性奇点；(2) 一级极点；(3) $z=1$ 是本性奇点，$z=\infty$ 是可去奇点；(4) 极点的极限点；(5) $z=\infty$ 是本性奇点，$z=a$ 与 b 不是孤立奇点. **2**. (1) $k\pi$ 是一级极点（k 是整数），$z=\infty$ 是极点的极限点；(2) $z=\infty$ 是可去奇点，$z=1$ 及 2 不是孤立奇点；(3) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ 是一级极点（k 是整数），$z=\infty$ 是极点的极限点；(4) $2k\pi i$ 是一级极点（k 是整数），$z=1$ 是本性奇点，$z=\infty$ 是极点的极限点. **3**. (1) $z=0$ 是二级极点，$z=1$ 是一级极点，$z=\infty$ 是可去奇点；(2) 当 $0<|z|<1$ 时，$-\frac{1}{z^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-2}$；当 $|z|>1$ 时，$\frac{1}{z^2}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$.

第四章复习讨论题 **1**. (1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$；(2) $\sum_{n=0}^{+\infty}z^n$；(3) $\sum_{n=0}^{+\infty}z^n$；(4) 没有；(5) 没有. **2**. (1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}$；(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}nz^n$；(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$，在 $z=1$ 发散；$z=-1$ 收敛. **10**. (1) 本性奇点；(2) 可去奇点；(3)

极点的极限点；(4) 极点的极限点；(5) 极点的极限点；(6) 可去奇点；(7) 一级极点. **11.** (1) $z=0$ 及 $z=1$ 都是一级极点，$z=\infty$ 是可去奇点；(2) $z=e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ $(k=0, 1, 2, 3)$ 都是一级极点，$z=\infty$ 是可去奇点；(3) $z=\infty$ 是本性奇点；(4) $z=\infty$ 是本性奇点；(5) $z=2k\pi i$ 是一级极点(其中 $k\neq 0$ 是整数)，$z=\infty$ 是极点的极限点；(6) $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 是一级极点 (其中 k 是整数)，$z=\infty$ 是极点的极限点；(7) $z=k\pi$ 是一级极点(其中 $k\neq 0$ 是整数)，$z=\infty$ 是极点的极限点；(8) $z=0$ 是本性奇点，$z=\infty$ 是可去奇点；(9) $z=0$ 及 $z=\infty$ 都是本性奇点；(10) $z=\frac{1}{k\pi}$ 是本性奇点 (其中 $k\neq 0$ 是整数)，$z=0$ 是本性奇点的极限点，$z=\infty$ 是本性奇点.

12.

$f_2(z)$ \ $f_1(z)$	可去奇点	极点	本性奇点
可去奇点	可去奇点	极点	本性奇点
极点	极点	或 可去奇点 如 $f_1=-f_2$ 或 极点 如 $f_1=f_2$	本性奇点
本性奇点	本性奇点	本性奇点	或 可去奇点 如 $f_1=-f_2$ 或 极点 如 $f_1=-f_2+\frac{1}{z-z_0}$ 或 本性奇点 如 $f_1=f_2$

18. (1) $\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\frac{z}{12}-\frac{z^3}{720}+\cdots$； (2) $1+\frac{z^2}{6}+\frac{7z^4}{360}+\cdots$. **20.** (1) 当 $n=m$ 时可能为可去奇点(如 $f_1(z)=-f_2(z)$)，也可能为任意 $k(k\leqslant m)$ 级极点 $\left(如\ f_1(z)=-f_2(z)+\frac{1}{z^k}\right)$； (2) $m+n$ 级极点；(3) 若 $n>m$,

则是 $n-m$ 级极点；若 $n\leqslant m$，则是 $m-n$ 级零点． **22**．(1) 可去奇点；(2) 可去奇点；(3) 解析；(4) 本性奇点． **24**．(1) 当 $f_2(z)$ 以 $z=z_0$ 为可去奇点时，$f_1(z)\cdot f_2(z)$ 以 $z=z_0$ 为本性奇点； (2) 当 $f_2(z)$ 以 $z=z_0$ 为极点时，$f_1(z)\cdot f_2(z)$ 以 $z=z_0$ 为本性奇点； (3) 当 $f_2(z)$ 以 $z=z_0$ 为本性奇点时，则可有各种情况：如 $f_1(z)=e^{\frac{1}{z}}$，$f_2(z)=e^{-\frac{1}{z}}$，则 $f_1(z)\cdot f_2(z)=1$ 以 $z=0$ 为可去奇点； 如 $f_1(z)=e^{\frac{1}{z}}$， $f_2(z)=e^{-\frac{1}{z}}\frac{1}{z^n}$，则 $f_1(z)\cdot f_2(z)=\frac{1}{z^n}$ 以 $z=0$ 为 n 级极点； 如 $f_1(z)=f_2(z)=e^{\frac{1}{z}}$， 则 $f_1(z)\cdot f_2(z)=e^{\frac{2}{z}}$ 以 $z=0$ 为本性奇点． **30**．(1) $\frac{\pi^2}{\sin^2\pi a}$； (2) $\frac{\pi^2}{8}$． **32**．(1) $\frac{\pi^2\cos\pi a}{\sin\pi a}$； (2) $\frac{\pi^3}{32}$； (3) $\frac{\pi}{2}\frac{\sin ab}{\sin a\pi}$．

第 五 章

习题5·1 **1**．(1) 在 $z=e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ 上的留数为 $-\frac{(1+i)}{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{3}{2}k\pi}$ $(k=0,1,2,3)$； 在 $z=\infty$ 的留数为 0； (2) 在 $z=k\pi$ 上留数为 1 (k是整数)； (3) 在 $z=2k\pi i$ 上的留数是 -1 (k 是整数)； (4) 在 $z=1$ 的留数是 2；在 $z=2$ 的留数是 -2；在 $z=\infty$ 的留数是 0； (5) 在 $z=z_2$ 的留数为 $\frac{2}{(z_2-z_1)^m}$；在 $z=z_1$ 的留数为 $\frac{-2}{(z_2-z_1)^m}$；在 $z=\infty$ 的留数为 0； (6) 在 $z=1$ 的留数为 -1； 在 $z=\infty$ 的留数为 1； (7) 在 $z=2k\pi i$ 的留数为 -1 (k 是整数)； (8) 在 $z=0$ 的留数为 1； 在 $z=\infty$ 的留数为 -1； (9) 在 $z=0$ 的留数为 $-\frac{1}{2}$； $z=2k\pi i$ 的留数为 $\frac{1}{2k\pi i}$ ($k\neq 0$ 是整数)； (10) $z=\frac{\pi}{4}-k\pi$ 的留数为 $\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}$ (k 是整数)． **2**． 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$，$g(z)=\sum_{n=2}^{+\infty}b_n(z-z_0)^n$，则 $z=z_0$ 的留数为 $\frac{a_1b_2-a_0b_3}{b_2^2}$．

习题5·2 **1**．(1) $-\frac{\pi i}{2}$； (2) 0； (3) $\frac{\pi}{2a^3}$； (4) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$； (5) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$； (6) 4π； (7) 当 $\beta>0$ 时，$-\pi i$； 当 $\beta<0$ 时，πi． (8) $\frac{\pi e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$； (9) $\frac{\pi}{8e}\left(1-\frac{1}{3e^2}\right)$； (10) $\frac{\pi}{e}$； (11) $\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2e}\right)$．

2. $-4\pi i$.

习题5·3 1. (1) 5; (2) 1; (3) 0.

第五章复习讨论题 4. 当无穷远点是可去奇点时，留数不一定等于零，如$\frac{1}{z}$，在$z=\infty$处留数为-1. 5. (1) $R(-1)=\frac{2n!}{(n+1)!(n-1)!}(-1)^{n+1}$, $R(\infty)=-\frac{2n!}{(n+1)!(n-1)!}(-1)^n$; (2) $R(-1)=2\sin 2$, $R(\infty)=-2\sin 2$; (3) $R(-1)=-\cos 1$, $R(\infty)=\cos 1$; (4) $R(0)=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!3!}+\cdots+\frac{1}{n!(n+1)!}+\cdots$, $R(\infty)=-\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!3!}+\cdots+\frac{1}{n!(n+1)!}+\cdots\right)$; (5) $R(k\pi)=0$, k是整数. 7. (1) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}$; (2) $\frac{2\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}$; (3) $\frac{\pi}{2^{2n-1}(n!)^2}$; (4) $\frac{\sqrt{13}\pi}{4}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{13}-3}{2\sqrt{13}}}$; (5) $\frac{\pi(2b+a)}{4ab^3(b+a)^2}$; (6) $\frac{\pi}{3e^3}(3\cos 1+\sin 1)$; (7) $\frac{3}{8}\pi$.
11. (1) 1; (2) 3. 12. (1) 0; (2) 4.

第 六 章

习题6·2 1. 就是它自己，自然边界为$|z|=1$.

习题6·3 1. (1) 0; (2) $\frac{\pi\ln|a|}{2|a|}$; (3) $-\pi$; (4) $\frac{\pi}{2|a|}\left(\ln|a|+\frac{\pi^2}{4}\right)$; (5) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

第六章复习讨论题 2. 定义域为$\mathrm{Re}\,z>0$，可以解析开拓到全平面除去$z=0$，得$\frac{1}{z}$. 6. (1) 4 个单值函数$e^{i\frac{k\pi}{4}}e^{\frac{z}{4}}$ $(k=0, 1, 2, 3)$; (2) 两个单值函数$\pm z$; (3)多值函数; (4) 多值函数.

7. (1) $\frac{-\pi}{\sin p\pi}\left(-1+2^{\frac{p}{2}}\cos\frac{p}{4}\pi\right)$; (2) $\frac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$; (3) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; (4) $\frac{1}{\ln a}+\frac{1}{1-a}$.

第 七 章

习题7·1 1. (1) $\theta_0<\arg z<\pi+\theta_0$ (θ_0是任何实数); (2) $\theta_0<\arg z$

$<\theta_0+\frac{2}{3}\pi$ (θ_0是任何实数). 2. $u=1-3t^2$, $v=t(3-t^2)$, $-1\leqslant t\leqslant 1$. 3. 等伸缩率: $|z+1|=c_2$; 等旋转角: $\arg(z+1)=c_3$, 其中 c_2 与 c_3 为常数. 5. $\frac{15}{2}\pi$.

习题7·2 1. $z_1=z+i$, $z_2=\frac{1}{z_1}$, $z_3=\sqrt{5}z_2$, $z_4=e^{i\theta_0}z_3$, $\theta_0=\mathrm{tg}^{-1}\frac{4}{3}$, $z_5=e^{\pi i}z_4$, $w=z_5-3i$. 2. $w=\frac{-4z}{(i-1)z-(1+i)}$. 3. (1) $u=a$; (2) $-v=ku$. 4. (1) $w=z+ai$ 及 $w=1+ai-z$ (a是任意实数); (2) $w=z+a(1+i)$ 及 $w=-z-i+a(1+i)$ (a是任意实数). 7. $\frac{w+1}{w-1}=k\frac{z+1}{z-1}$ (其中k是任意复数). 8. (1) $w=\frac{2(z+1)}{4iz+5-i}$; (2) $w=\frac{iz+3}{(2+i)(z-i)}$. 9. (1) 下半个单位圆; (2) $|w|<1$ 中除去$\left|w+\frac{5}{4}\right|\leqslant\frac{3}{4}$后的区域; (3) $\mathrm{Im}\,w<0$ 上除去$\left|z-\frac{1}{2}(1-i)\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$后的区域. 10. $w=\frac{2z+1}{\frac{-z}{2}+1}$. 11. $w=\frac{i-z}{i+z}$. 12. $w=Ri\frac{z-i}{z-\bar{i}}+w_0$. 13. $w=\frac{z+a}{1+az}$. 14. (1) $w=\frac{2z-1}{2-z}$; (2) $\frac{w-a}{1-aw}=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-az}$. 15. $w=\frac{1-z}{z+2}$. 16. $w=a\frac{z-1}{z+1}$ $(a<0)$. 17. $w=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{z-1}{z+1}$. 18. $w=\frac{(5+3\sqrt{3})z-(9+5\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})z-(3+\sqrt{3})}$, 半径之比为 $7+4\sqrt{3}$. 19. $w=-\frac{20}{z}$. 20. $w=\frac{2z}{z+24}e^{i\alpha}$, α为任何实数, $\rho=\frac{2}{3}$.

习题7·3 1. $w=\frac{z+\frac{1}{z}}{1+h+\frac{1}{1+h}}+\sqrt{\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{1+h+\frac{1}{1+h}}\right)^2-1}$.

$$2.\ w=\left(\frac{1-\delta}{1+\delta}+\frac{z_1+\frac{1}{z_1}}{1+\delta}\right)+\sqrt{\left(\frac{1-\delta+z_1+\frac{1}{z_1}}{1+\delta}\right)^2-1},$$

其中 $\delta=\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)$, $z_1=ze^{-i\alpha}$.

3. $w=\dfrac{1-\cos\varphi+z+\dfrac{1}{z}}{1+\cos\varphi}+\sqrt{\left(\dfrac{1-\cos\varphi+z+\dfrac{1}{z}}{1+\cos\varphi}\right)^2-1}$.

习题 7·4 **1.** (1) $w=i\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3$; (2) $w=e^{i\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3}\right)}$; (3) $w=\left[\dfrac{-(z+\sqrt{3})}{z-\sqrt{3}}\right]^{\frac{3}{2}}$; (4) $w=\dfrac{\pi}{2}\sin z$. **2.** (1) $w=-\sqrt{\dfrac{i(z+1)}{1-z}}$;

(2) $w=-\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)+1}$.

3. (1) $w=\ln(1+e^z+e^{-z}+\sqrt{(1+e^z+e^{-z})^2-1})$;

(2) $w=\left[\left(\dfrac{z^{\frac{\pi}{\alpha}}+z^{-\frac{\pi}{\alpha}}}{h^{\frac{\pi}{\alpha}}+h^{-\frac{\pi}{\alpha}}}\right)+\sqrt{\left(\dfrac{z^{\frac{\pi}{\alpha}}+z^{-\frac{\pi}{\alpha}}}{h^{\frac{\pi}{\alpha}}+h^{-\frac{\pi}{\alpha}}}\right)^2-1}\right]^{\frac{\alpha}{\pi}}$;

(3) $w=\dfrac{z+\dfrac{1}{z}-4}{2\left(z+\dfrac{1}{z}\right)+4}$; (4) $w=\arcsin\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}-z-\dfrac{1}{z}\right)}$.

习题 7·5 **1.** $w=\dfrac{z+\dfrac{1}{z}}{h+\dfrac{1}{h}}+\sqrt{\left(\dfrac{z+\dfrac{1}{z}}{h+\dfrac{1}{h}}\right)^2-1}$. **2.** $w=\left(\dfrac{z^2+z^{-2}}{h^2+h^{-2}}+\sqrt{\left(\dfrac{z^2+z^{-2}}{h^2+h^{-2}}\right)^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$. **3.** $w=\arccos\left(\dfrac{2\cos z}{e^{\pi}+e^{-\pi}}\right)$. **7.** 全平面上除去 n 条射线 $[e^{i\frac{2k}{n}\pi}, +\infty e^{i\frac{2k}{n}\pi})$ $(k=0, 1, \cdots, n-1)$ 后的区域. **8.** 全平面上除去两条射线 $(-\infty+\pi i, -1+\pi i]$ 及 $(-\infty-\pi i, -1-\pi i]$ 后的区域.

习题 7.6 **1.** $w=(1+i\sqrt{3})\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}\int_0^z z^{-\frac{2}{3}}(z-1)^{-\frac{2}{3}}dz-1$. **2.** (1) $w=\dfrac{h}{\pi}\int_{-1}^{z}\dfrac{(z+1)^{\alpha}}{z}dz+ih$; (2) $w=\dfrac{2i}{\pi}\left(h\,\mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{hz}{H\sqrt{z^2-a^2}}+H\,\mathrm{arc\,th}\,\dfrac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}\right)$. **3.** $w=c_1\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}\dfrac{dz}{(z-\beta)^2(z-\bar{\beta})^2}+c_2$, 其中 $a_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 及 c_1、c_2、β 属于多角形外部区

域，是适当的数.

第七章复习讨论题 3. $\varphi_0<\arg z<\frac{2\pi}{5}+\varphi_0$（$\varphi_0$是任何实数）. 10. (1) $w=\frac{3z-(1+2i)}{z+1}$; (2) $w=\frac{z+1}{(2+i)(z-i)}$. 11. $w=\frac{2+iz}{2-iz}$. 12. $w=\frac{z-(2-i)}{\frac{i}{2}z+(1-i)}$. 13. $w=\frac{2(4z-3)}{4z+3}$, $h=\frac{5}{4}$.

15. 对于 z^n: $\varphi_0<\arg z<\varphi_0+\frac{2\pi}{n}$, φ_0为任何实数; 对于 e^z: $y_0<\operatorname{Im} z<y_0+2\pi$, y_0是任何实数. 16. $x=x_0\to|w|=e^{x_0}$, $y=y_0\to\arg w=y_0$. 17. $f(z)=z^2$ 在 $0<\arg z<2\pi$. 18. 对减、乘两种运算取$f_1(z)=f_2(z)=z$; 对加、除两种运算取$f_1(z)=-f_2(z)=z$. 22. $u=\cos\theta+\frac{1}{n}\cos n\theta$, $v=\sin\theta+\frac{1}{n}\sin\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$所围的区域. 23. 上半平面. 24. 下半平面. 25. $w=\sqrt{-\frac{1}{z^2}+\sqrt{\frac{1}{z^4}-1}}$. 26. (1) 第四象限; (2) 焦点为$\pm1$，长半轴长为$\frac{e^h+e^{-h}}{2}$，短半轴长为$\frac{e^h-e^{-h}}{2}$的椭圆内除去线段$\left[-\frac{e^h+e^{-h}}{2},\ -1\right]$及$\left[1,\ \frac{e^h+e^{-h}}{2}\right]$后的区域. 27. (1) $w=\sqrt{e^{i(\pi z-\pi hi)}+1}$; (2) $w=\sqrt{\left(\frac{\cos\frac{2\pi}{b}+\cos\frac{2\pi}{a}-2\cos\frac{2\pi}{z}}{\cos\frac{2\pi}{b}-\cos\frac{2\pi}{a}}\right)^2-1}-\frac{\cos\frac{2\pi}{b}+\cos\frac{2\pi}{a}-2\cos\frac{2\pi}{z}}{\cos\frac{2\pi}{b}-\cos\frac{2\pi}{a}}$. 30. (1) $w=cz^2$ $(c>0)$; (2) $w=\frac{h}{\pi}\left(\ln\frac{z+1}{z-1}+\pi i\right)$; (3) $w=\frac{ia\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}\int_0^z z^{-\frac{5}{6}}(z-1)^{-\frac{1}{2}}dz$; (4) $w=-\frac{a}{\pi}\int_1^z z^{\theta-1}(z-1)^{-\theta}dz$; (5) $w=\frac{a}{\theta\pi}\int_1^z\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\theta}dz$.

第 八 章

习题8·2 **1.** (1) $\frac{2}{p^3}-\frac{6}{p^2}+\frac{9}{p}$, $\operatorname{Re} p>0$; (2) $\frac{1}{p^2-1}$, $\operatorname{Re} p>1$; (3) $\frac{1}{(p+a)^2}$, $\operatorname{Re} p>-\operatorname{Re} a$; (4) $\frac{1}{p(p+a)}$, $\operatorname{Re} p>0$.

习题8·3 **1.** (1) $\frac{\Gamma(a+1)}{(p-\beta)^{a+1}}$, $\operatorname{Re} p>\operatorname{Re}\beta$; (2) $\frac{(3p^2-a^2)}{(p^2+a^2)^3}$, $\operatorname{Re} p>|\operatorname{Im} a|$; (3) $\frac{p}{(p^2+\alpha^2)(p^2+\beta^2)}$, $\operatorname{Re} p>\max(|\operatorname{Im}\alpha|, |\operatorname{Im}\beta|)$; (4) $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$, $\operatorname{Re} p>0$.

习题8·4 **1.** (1) $J_0(iat)$; (2) $J_0(at)$; (3) $6+5e^{-2t}+4e^{3t}$; (4) $3-2t+t^2+(-3+t)e^{-t}$.

习题8·6 **1.** (1) t^3e^{-t}; (2) $\frac{c}{b^2+a^2}\left(\frac{b}{a}\sin at-\cos at+e^{-bt}\right)$; (3) $\frac{c\omega}{(4+\omega^2)^2}\left[\left((4+\omega^2)t+4\right)e^{-2t}+\frac{4-\omega^2}{\omega}\sin\omega t-4\cos\omega t\right]$; (4) $4e^t-8e^{2t}+6e^{3t}$; (5) $\sin t+\sin 2t-2\cos 3t$; (6) $te^t\sin t$. **2.** $x(t)=y(t)=e^t$.

第八章复习讨论题 **3.** (1) $\frac{2\omega(3p^2-\omega^2)}{(p^2+\omega^2)^3}$, $\operatorname{Re} p>|\operatorname{Im}\omega|$; (2) $\frac{6(p^4-6p^2\omega^2+\omega^4)}{(p^2+\omega^2)^4}$. **6.** (1) $-\frac{1}{6}e^t+\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{6}e^{4t}$; (2) $\frac{t}{2a}\sin at$. **8.** (1) $3\operatorname{ch} t$; (2) $x(t)=e^{2t}$, $y(t)=3e^{2t}$.